VEKTOROVÉ FUNKCE: PŘÍKLADY

① [Došlá, str 86] Vypočtěte Jacobiho matici zobrazení $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je dáno předpisem

$$F(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)^T$$

$$\left[\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}\right]$$

② Najděte funkční předpis následujících zobrazení a vypočtěte jejich Jacobiho matice:

a) osová souměrnost podle přímky p, jejíž rovnice je

$$ax + by + c = 0$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{(b^2-a^2)x - 2a(by+c)}{a^2+b^2} \\ \frac{(a^2-b^2)y - 2b(ax+c)}{a^2+b^2} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & -\frac{2ab}{a^2+b^2} \\ -\frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix}\right]$$

b) složení osové souměrnosti podle přímky $y = x$ a projekce bodu na jednotkovou kružnici (definované na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$).

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}\right]$$

c) bodu $(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ je přiřazen bod ležící na rovníku sféry se středem v počátku, procházející bodem $(x,y,z)^T$, přičemž přiřazený bod leží na stejném poledníku.

$$\left[\begin{pmatrix} x\sqrt{1+\frac{z^2}{x^2+y^2}} \\ y\sqrt{1+\frac{z^2}{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{(x^2+y^2)^2+y^2z^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{(x^2+y^2)^2+x^2z^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

③ Vypočítejte jakobián (= determinant Jacobiho matice) následujících transformací:

a) polární souřadnice (r,φ):
$$x = r\cos\varphi \qquad [r]$$
$$y = r\sin\varphi$$

b) sférické souřadnice (r,φ,θ):
$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad [-r^2\sin\theta]$$
$$z = r\cos\theta$$

c) válcové souřadnice (r,φ,z):
$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad [r]$$
$$z = z$$

④ [Kopáček 2 str. 110] Vypočítejte $\frac{\partial F}{\partial u}$, kde $F = f\circ g$, přičemž $f(x,y,z)$ je daná funkce a

$$g_1(u,v) = \frac{u^2-1}{2v},\quad g_2(u,v) = \frac{u+v}{u-v},\quad g_3(u,v) = u^2-v^2.$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{u}{v} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{2v}{(u-v)^2} + 2\frac{\partial f}{\partial z}\cdot u\right]$$

(5) Napište diferenciál funkce $f(x,y,z)$, kde

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = 2uv.$$

$$\left[2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot u + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot v\right)du + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}v - \frac{\partial f}{\partial y}v + \frac{\partial f}{\partial z}u\right)dv\right]$$

(6) Vypočtěte $\frac{\partial F}{\partial v \partial u}$, kde F, g_1, g_2, g_3 jsou dané v příkladu (4).