Vektorové funkce

Doposud jsme se zabývali výhradně zobrazeními typu

$$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \qquad (N \in \mathbb{N}),$$

tedy reálnými funkcemi jedné či více reálných proměnných.
Nyní se zaměříme na zobrazení typu

$$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M \qquad (N \in \mathbb{N},\ M \in \mathbb{N}),$$

kterým budeme říkat vektorové funkce.
Rádi bychom vytvořili teorii diferenciálního počtu pro tento typ zobrazení tak, aby diferenciální počet funkcí více proměnných byl jejím speciálním případem.
Tuto teorii pak využijeme při studiu integrálů funkcí více proměnných.

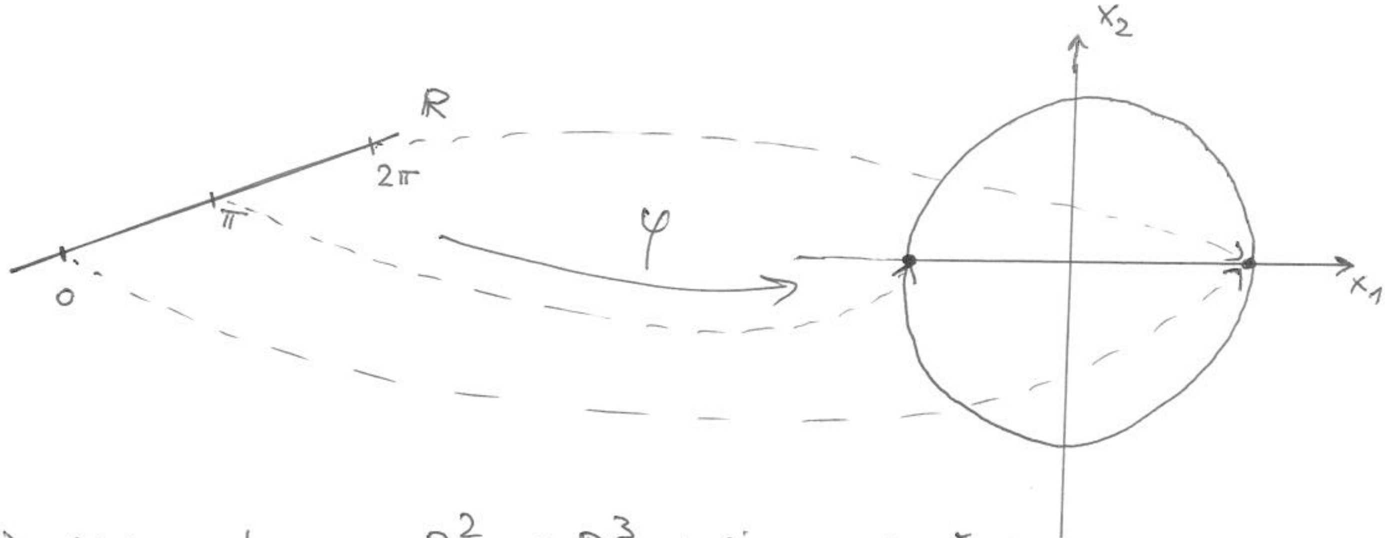
<u>Úmluva</u>: Prvky množiny $\mathbb{R}^N$ budeme chápat jako sloupce – sloupcové vektory. Důvody jsou ryze technického charakteru a budou vysvětleny později. Protože se sloupcové vektory píší do řádku neúsporně, zavedeme operátor transpozice:

$$(x_1, x_2, \dots, x_N)^T := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}.$$

<u>Příklady</u>: Se zobrazeními typu $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ pro $M > 1$ se setkáváme celkem často. Ať už jde o parametrizaci křivek, ploch nebo různé transformace (v rovině, v prostoru).
(1) Zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

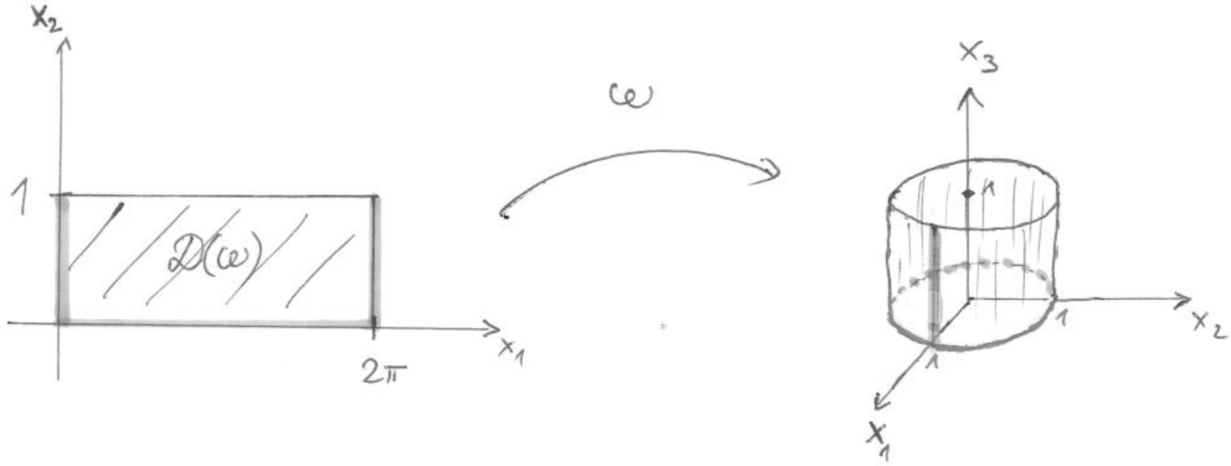
je parametrizací kružnice, viz následující obrázek.



(2) Zobrazení $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\omega(x_1, x_2) = (\cos x_1, \sin x_1, x_2) \qquad (x_1, x_2) \in \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$$

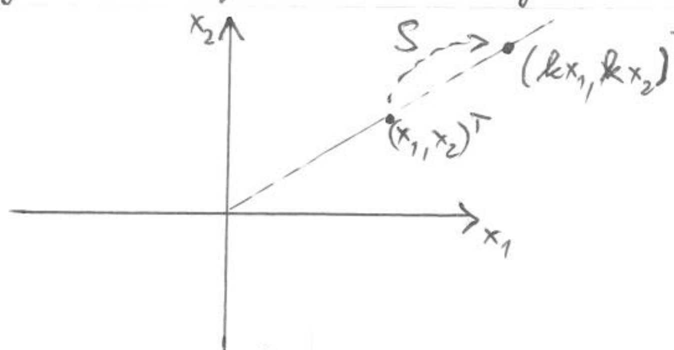
je parametrizací pláště válce, viz obrázek:



(3) Zobrazení $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$S(x_1, x_2) = (k x_1, k x_2)^T \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

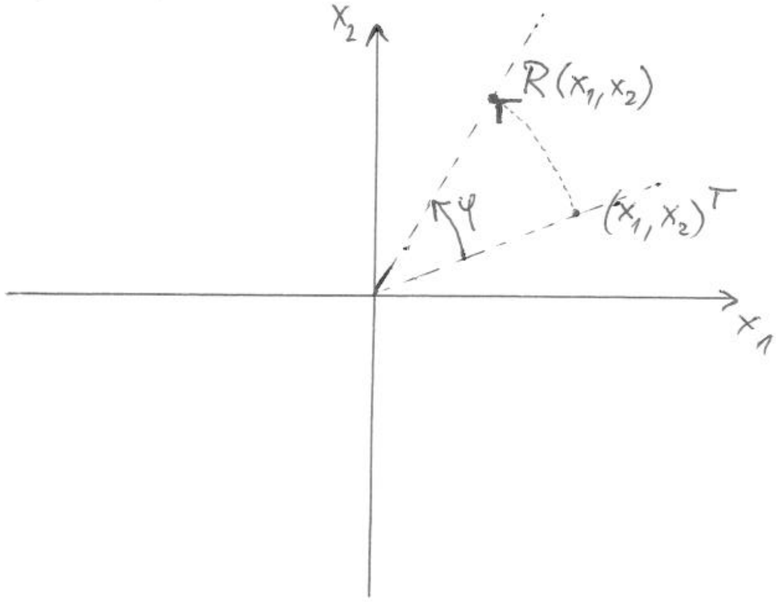
definuje transformaci „stejnolehlost se středem v počátku" s parametrem k jakožto koeficientem stejnolehlosti – viz obrázek.



(4) Zobrazení $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$R(x_1, x_2) = (x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi)^T$$

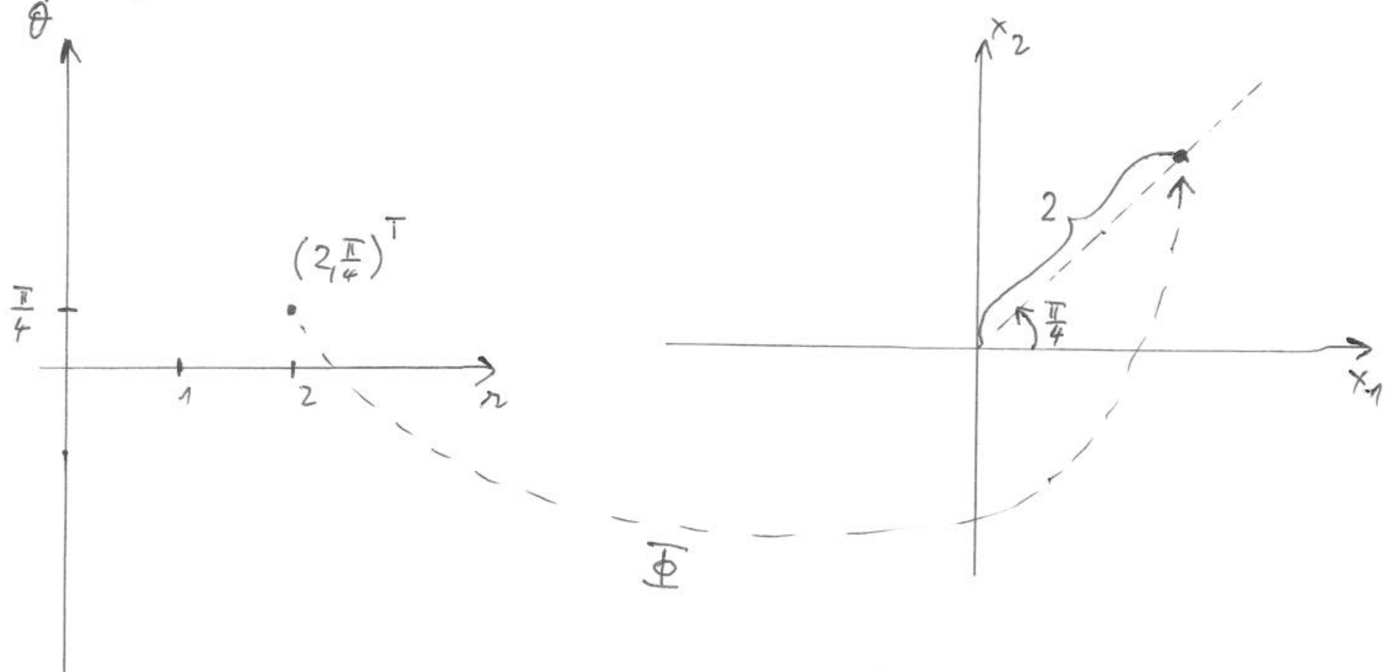
definuje transformaci „rotace o úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ v kladném smyslu podle počátku“ – viz obrázek



(5) Zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)^T \quad (r, \theta) \in \langle 0, \infty) \times \mathbb{R}$$

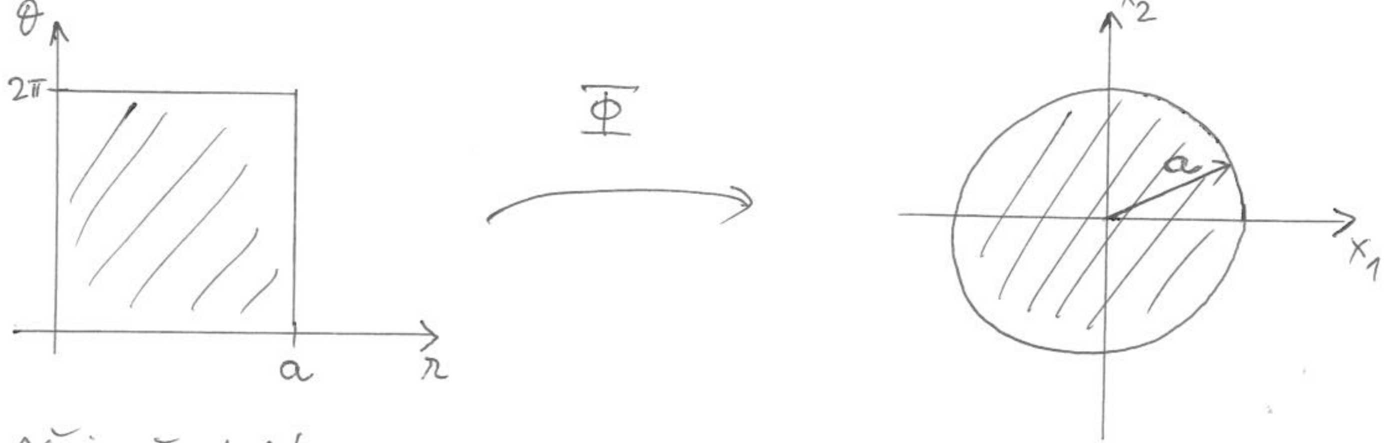
definuje „polární souřadnice“.



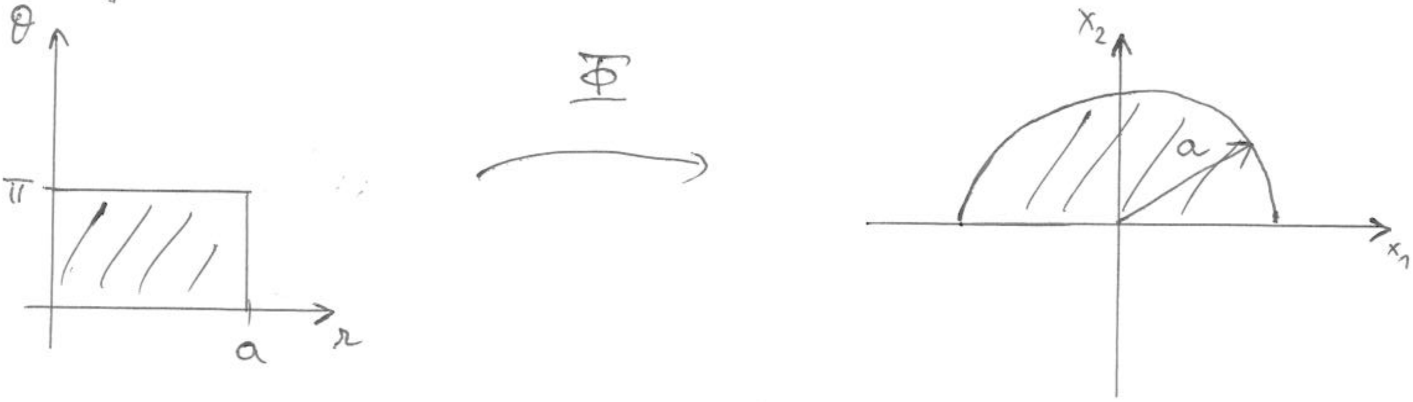
Právě polární souřadnice budeme používat při výpočtech dvojného integrálu přes oblasti typu kruh, kruhová výseč či prstenec. Je totiž potřeba popsat takové množiny co možná nejjednodušeji. Například kruh o středu v počátku a poloměru $a > 0$ je obrazem kartézského součinu

$$\langle 0, a\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$$

v zobrazení Φ – viz obrázek:



Zřejmě také



S dalšími transformacemi se setkáme v integrálním počtu funkcí více proměnných.

Nyní obecně: Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ $(M, N \in \mathbb{N})$.
Zřejmě existuje M funkcí N proměnných

$$f_1, f_2, \dots, f_M : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

tak, že $\mathcal{D}(f_1) = \mathcal{D}(f_2) = \dots = \mathcal{D}(f_M) = \mathcal{D}(f)$ a

$$f(x_1, \dots, x_N) = (f_1(x_1, \dots, x_N), f_2(x_1, \dots, x_N), \dots, f_M(x_1, \dots, x_N))^T$$
$$\text{pro } \forall (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{D}(f).$$

Zkráceně budeme psát

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_M(x))^T, \quad x \in \mathcal{D}(f)$$

nebo ještě lépe

$$f = (f_1, \dots, f_M)^T.$$

Funkcím $f_1, \dots, f_M$ budeme říkat složky vektorové funkce f.

Limita a spojitost vektorových funkcí

Nejprve se krátce zmíníme o limitě a spojitosti vektorových funkcí. Limitu budeme potřebovat při definici diferenciálu vektorové funkce.

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ $(M, N \in \mathbb{N})$, $a \in (\mathcal{D}(f))'$, $A \in \mathbb{R}^M$.
Řekneme, že f má v bodě a limitu A, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(f) : \ x \in \mathcal{R}_\delta(a) \implies f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)$$

Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Poznámka Jak je vidět, limita funkce N proměnných je speciálním případem (pro $M=1$) limity vektorové funkce. Zkontrolujte!

[Navíc, i tento pojem je speciálním případem limity zobrazení mezi metrickými prostory:

Definice Nechť $f: X \to Y$, kde (X, ρ), (Y, σ) jsou metrické prostory; $a \in (D(f))'$, $A \in Y$. Řekneme, že zobrazení f má v bodě a limitu A, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D(f) : x \in R_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).]$$

Ještě si uvedeme „převodovací" větu (větu se stejným názvem a podobným významem najdete v přednášce o limitě posloupnosti N-tic reálných čísel), pomocí které můžeme snadno určovat zda vektorová funkce má či nemá limitu a pokud má, tak jak vypočítat její hodnotu.

Věta Nechť $f = (f_1, \dots, f_M)^T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ je vektorová funkce, $a \in (D(f))'$, $A = (A_1, A_2, \dots, A_M)^T \in \mathbb{R}^M$. Platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \lim_{x \to a} f_i(x) = A_i \text{ pro } \forall i = 1, \dots, M.$$

Z věty vyplývá, že chceme-li najít limitu vektorové funkce, stačí najít limity jejích složek a vektor sestavený z těchto limit je roven limitě této vektorové funkce.

Příklad Je dána vektorová funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ předpisem

$$f(x) = \left(x^3, \frac{x^2-1}{x-1}, \frac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^T, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Určete

$$\lim_{x\to 1} f(x).$$

Řešení

Víme, že

$$\lim_{x\to 1} x^3 = 1, \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2, \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1.$$

Z předchozí věty vyplývá, že $\lim_{x\to 1} f(x)$ existuje a je rovna

$$(1, 2, 1)^T.$$

Poznámka Poté co jste viděli zobecnění pojmu limity pro vektorové funkce, nebude asi pro vás problém zobecnit pojem spojitosti. Pro úplnost jej zde uvedu.

Definice Nechť $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ $(M, N \in \mathbb{N})$, $a \in \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je v bodě a spojitá, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathcal{D}(f) : \; x \in U_\delta(a) \implies f(x) \in U_\varepsilon(f(a)).$$

Asi vás příliš nepřekvapí následující vztah mezi limitou a spojitostí (naleznete odpovídající větu u funkcí více proměnných).

Věta Nechť $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $a \in \overline{\mathcal{D}(f)}$. Pak vekt. funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Odtud a z přemosťovací věty plyne, že „vektorová funkce je v daném bodě spojitá právě tehdy, když jsou v tomto bodě spojité všechny její složky".

O limitách a spojitosti vektorových funkcí by se dalo mluvit velmi dlouho. Těžiště našeho zájmu ovšem spočívá zejména v diferenciálu vektorové funkce.
Z celé obsáhlé teorie si proto vybereme jen jednu, méně "významné" pomocné tvrzení s jehož speciálním případem jsme se již setkali dříve. A to proto, že využijeme dále jen jej.

<u>Lemma</u> Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ $(M, N \in \mathbb{N})$, $a \in (\mathcal{D}(f))'$. Pak platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = \underline{o} \iff \lim_{x\to a} \|f(x)\| = 0.$$

<u>Směrová derivace vektorové funkce</u>

Tento pojem opět nadefinujeme tak, aby jeho speciálním případem byla směrová derivace funkce (N proměnných).

<u>Definice</u> Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ $(M, N \in \mathbb{N})$, $a \in \mathrm{int}(\mathcal{D}(f))$, $\underline{o} \neq \underline{v} \in \mathbb{V}^N$. Existuje-li limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\underline{v}) - f(a)}{h},$$

nazýváme ji derivací vektorové funkce f v bodě a ve směru vektoru $\underline{v}$ (směrovou derivací vektorové funkce f v bodě a podle vektoru $\underline{v}$). Značíme ji symboly

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(a), \; f'_{\underline{v}}(a), \; f_{\underline{v}}(a), \text{ apod...}$$

<u>Poznámka</u> (a) Formálně je definice téměř stejná jako definice směrové derivace funkce více proměnných – a to proto, že jde o její zobecnění (srovnejte!!!).

(b) Je třeba upozornit na to, že zobrazení

$$\mathbb{R} \ni h \longmapsto \frac{f(a+h\underline{v}) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}^M$$

je vektorová funkce o M složkách a o jedné proměnné.
Tedy výraz

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h\underline{v}) - f(a)}{h}$$

je limita vektorové funkce – proto jsme se na této přednášce museli alespoň „dotknout" tohoto pojmu.

(c) Dále si všimněte, že směrová derivace již není číslo ale (sloupcový) vektor.

Poznámka Z předchozí věty lze snadno dokázat:
„ Existuje-li $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(a)$ pro $f = (f_1, \dots, f_M)^T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, pak

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \underline{v}}(a), \frac{\partial f_2}{\partial \underline{v}}(a), \dots, \frac{\partial f_M}{\partial \underline{v}}(a) \right)^T."$$

Diferenciál vektorové funkce

Jistě si pamatujete na pojem diferenciálu funkce jedné a více proměnných. Pokud ne, připomínám definici:

Lineární zobrazení $df(a) : \mathbb{V}^N \to \mathbb{R}$ jsme nazvali (totálním) diferenciálem funkce f v bodě $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}f)$) jestliže existovala funkce $o : \mathbb{V}^N \to \mathbb{R}$ taková, že

$$f(a+\underline{h}) - f(a) = df(a)(\underline{h}) + o(\underline{h}) \qquad \forall \underline{h} \dots,$$

kde

$$\lim_{\underline{h} \to \underline{o}} \frac{o(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = 0$$

$$\left(\text{nebo ekvivalentně } \lim_{\underline{h} \to \underline{o}} \frac{|o(\underline{h})|}{\|\underline{h}\|} = 0 \right).$$

Reprezentantem lineárního zobrazení $\mathbb{V}^N \to \mathbb{R}$ byl (řádkový) vektor

Reprezentantem lineárního zobrazení $\mathbb{V}^N \to \mathbb{V}^M$ je matice. Platí totiž ~~tvrzení~~:

„Nechť $L : \mathbb{V}^N \to \mathbb{V}^M$ je lineární zobrazení. Pak existuje matice A typu (M, N) taková, že

$$L(\underline{h}) = A\underline{h} \qquad \forall\, \underline{h} \in \mathbb{V}^N.\text{"}$$

Pokuste se ho dokázat – jde o cvičení z lineární algebry.

<u>Poznámka</u> Uvědomte si, co znamená součin $A\underline{h}$. Jde o součin matice a vektoru. Aby měl smysl, musí jít o sloupcový (!!!) vektor a počet řádků matice A musí být roven počtu složek vektoru $\underline{h}$.

Toto je tedy důvod, proč v této kapitole chápeme všechny vektory jako sloupcové. Kdyby byly řádkové, museli bychom psát

$$\underline{h} \cdot A$$

(zde uvedená matice A není totožná s maticí A z tvrzení), což „není příliš pěkné".

Nyní jsme připraveni nadefinovat diferenciál vektorové funkce.

<u>Definice</u> Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}(f))$.
Lineární zobrazení $df(a) : \mathbb{V}^N \to \mathbb{V}^M$ nazveme (totálním) diferenciálem vektorové funkce f v bodě a, jestliže

$$f(a+\underline{h}) - f(a) = df(a)(\underline{h}) + \sigma(\underline{h})$$

pro každé $\underline{h} \in \mathbb{V}^N$ takové, že $a + \underline{h} \in \mathcal{D}(f)$, kde $\sigma : \mathbb{V}^N \to \mathbb{V}^M$ je vektorová funkce splňující podmínku

$$\lim_{\underline{h} \to \underline{o}} \frac{\sigma(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = \underline{o} \in \mathbb{R}^M$$

$$\left(\text{nebo-li } \lim_{\underline{h} \to \underline{o}} \frac{\| \sigma(\underline{h}) \|}{\| \underline{h} \|} = 0 \right).$$

Přirozeně se vtírá otázka, co plyne z existence diferenciálu a jakého tvaru je jeho reprezentant – v tomto případě jde tedy o matici typu (M, N). Na obě otázky odpovídá věta zobecňující vlastnosti diferenciálu funkcí jedné a více proměnných:

__Věta__ Nechť $f = (f_1, \dots, f_M)^T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ má v bodě $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}(f))$ diferenciál $df(a)$. Pak

(a) f je v bodě a spojitá,

(b) reprezentant diferenciálu $df(a)$ je matice ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a), & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_M}{\partial x_2}(a), & \dots, & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}.$$

__Důkaz__ se dá provést stejným způsobem jako důkaz odpovídající věty pro diferenciál funkce. Pokuste se o něj.

__Definice__ Reprezentanta diferenciálu vektorové funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ v bodě $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}f)$ budeme nazývat Jacobiho maticí a značit symbolem $\nabla f(a)$ (v literatuře bývá označován jako $J f(a)$, $D f(a)$, apod...)

__Poznámka__ Všimněte si, že řádky Jacobiho matice vektorové funkce jsou gradienty jejích složek.

Dá se tedy napsat

$$df(a)(\underline{h}) = \nabla f(a) \cdot \underline{h} \qquad \forall \underline{h} \in \mathbb{V}^N,$$

kde $\cdot$ je maticové násobení (nebo také násobení matice a vektoru). Všimněte si, že speciálně pro $M=1$, tedy je-li f funkcí N proměnných, pak

$$\nabla f(a) \cdot \underline{h} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right) \cdot (h_1, h_2, \dots, h_N)^T =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i = \langle \nabla f(a), \underline{h} \rangle$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označuje standardní skalární součin ve $\mathbb{V}^N$.

<u>Poznámka</u>: Nepleťte si Jacobiho matici s Hessovou maticí. Jde o dva naprosto odlišné pojmy.

<u>Příklad</u> Uvažujme vektorovou funkci

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)^T \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Vypočtěte $\nabla f(a)$ pro $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

<u>Řešení</u> Nejprve vypočítáme všechny parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_1 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2x_1 =$$
$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) = x_1\,\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) = -\frac{x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pak již snadno určíme

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a), & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_2^2}{\left(a_1^2+a_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}, & -\frac{a_1a_2}{\left(a_1^2+a_2^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{a_1a_2}{\left(a_1^2+a_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{a_1^2}{\left(a_1^2+a_2^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

Věta o diferenciálu složeného zobrazení

Než se pustíme do formulace a důkazu věty o diferenciálu složeného zobrazení, bude vhodné, když si nejprve připomeneme, co platí pro funkce jedné proměnné.

Mějme funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a uvažujme jejich složení

$$g \circ f \; (= g(f)).$$

Z věty o derivaci složené funkce víme, že pro $a \in \mathbb{R}$ platí

$$(1) \qquad (g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a)$$

– za předpokladu, že existují vlastní derivace na pravé straně.

Podíváme-li se na tento vztah z pohledu diferenciálu funkce jedné proměnné, vidíme, že

$(g\circ f)'(a)$ je reprezentant diferenciálu funkce $g\circ f$ v bodě a,
$g'(f(a))$ je reprezentant diferenciálu funkce g v bodě $f(a)$,
$f'(a)$ je reprezentant diferenciálu funkce f v bodě a.

Tedy vzorec (1) lze číst takto: „Reprezentant diferenciálu funkce $g\circ f$ v bodě a je roven součinu reprezentanta diferenciálu funkce g v bodě $f(a)$ a reprezentanta diferenciálu funkce f v bodě a."

Budeme-li značit reprezentanta diferenciálu funkce f v bodě a symbolem $\nabla f(a)$ (jak jsme to již dříve dělali) můžeme rovnost (1) napsat takto:

$$\nabla(g\circ f)(a) = \nabla g(f(a))\cdot\nabla f(a).$$

Možná si říkáte, že tu dokola přepisuji jednu věc pořád dokola – v tom případě máte pravdu. Nicméně, naposled napsaná rovnost má nejenže smysl i pro vektorové funkce g a f, ale dokonce za jistých jednoduchých předpokladů platí.

To je obsahem věty o diferenciálu složeného zobrazení.

<u>Věta</u> Nechť $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $g: \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^Q$, $M, N, Q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^N$.

Jestliže

f má diferenciál v bodě a (označme symbolem $\nabla f(a)$ jeho reprezentanta),

g má diferenciál v bodě $f(a)$ (označme symbolem $\nabla g(f(a))$ jeho reprezentanta),

pak

$g \circ f$ má diferenciál v bodě a (označme symbolem $\nabla g \circ f(a)$ jeho reprezentanta) a platí

$$(2) \qquad \nabla(g \circ f)(a) = \nabla g(f(a)) \cdot \nabla f(a).$$

<u>Poznámka</u> Rovnost (2) je rovností dvou matic.
Vzhledem k tvaru Jacobiho matice tedy (2) říká:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_N}(a) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial (g\circ f)_Q}{\partial x_1}(a), \dots \frac{\partial (g\circ f)_Q}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(a)), \dots, \frac{\partial g_1}{\partial y_M}(f(a)) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial g_Q}{\partial y_1}(f(a)), \dots, \frac{\partial g_Q}{\partial y_M}(f(a)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}.$$

Neboli, pro $i = 1, \dots, Q$, $j = 1, \dots, N$ platí:

$$\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Tento vzorec budeme nejčastěji používat pro $Q = 1$.

Než přikročíme k důkazu věty zmíníme dvě pomocná tvrzení. Přičemž symbolem $\|\cdot\|$ budeme vždy chápat euklidovskou normu.

<u>Lemma A</u> Pro matici $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{M,N} \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$ a pro každý sloupcový vektor $\underline{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ platí

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|,$$

přičemž normu matice $\|A\|$ definujeme předpisem

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{M,N} a_{ij}^2}$$

(skutečně jde o normu – zkuste ověřit).

<u>Důkaz</u> Jde vlastně o zobecnění Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti.
Označme $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{M,N}$, $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{iN})$ – i-tý řádek matice A pro $i = 1, \dots, M$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$.

Z Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti plyne

$$|(a_i, \underline{x})| \le \|a_i\| \cdot \|\underline{x}\|. \qquad /^2$$

$$(a_i, \underline{x})^2 \le \|a_i\|^2 \cdot \|\underline{x}\|^2 \qquad \sum_{i=1}^{M}$$

$$\sum_{i=1}^{M} (a_i, \underline{x})^2 \le \sum_{i=1}^{M} \|a_i\|^2 \cdot \|\underline{x}\|^2 \qquad \sqrt{}$$

$$\|A\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} (a_i, \underline{x})^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \|a_i\|^2} \cdot \|\underline{x}\|.$$

Protože

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{M} \|a_i\|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} (a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{iN}^2)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{M,N} a_{ij}^2} = \|A\|$$

je nerovnost dokázána.

<u>Lemma B</u> Nechť $o, \varepsilon : \mathbb{V}^N \to \mathbb{V}^M$ jsou takové, že

$$o(\underline{h}) = \|\underline{h}\| \cdot \varepsilon(\underline{h}) \qquad \forall\, \underline{h} \in \mathbb{V}^N.$$

Pak

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{o}} \frac{\|o(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\underline{h}\to\underline{o}} \|\varepsilon(\underline{h})\| = 0.$$

<u>Důkaz</u> Ekvivalence plyne z rovnosti

$$\|\varepsilon(\underline{h})\| = \left\| \frac{o(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} \right\| = \frac{\|o(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|} \qquad \forall\, \underline{h} \neq \underline{o}. \qquad \square$$

<u>Poznámka</u>
Z lemmatu B tedy plyne, že v definici diferenciálu lze místo $o(\underline{h})$ psát $\|\underline{h}\| \cdot \varepsilon(\underline{h})$, kde ε splňuje

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{o}} \|\varepsilon(\underline{h})\| = 0.$$

Nyní můžeme přistoupit k samotnému důkazu věty o diferenciálu složeného zobrazení.

<u>Důkaz</u> (a) Kvůli lepší čitelnosti označme $b = f(a)$.
Z předpokladů věty a předchozí poznámky dostáváme existenci zobrazení $\varepsilon_1 : \mathbb{V}^N \to \mathbb{V}^M$ a $\varepsilon_2 : \mathbb{V}^M \to \mathbb{V}^Q$

$$f(a+\underline{h}) - f(a) = \nabla f(a) \cdot \underline{h} + \|\underline{h}\|\, \varepsilon_1(\underline{h})$$

pro každé $\underline{h} \in \mathbb{V}^N$ takové, že $a + \underline{h} \in \mathcal{D}(f)$ a

(2) $$g(b+\underline{k}) - g(b) = \nabla g(b) \cdot \underline{k} + \|\underline{k}\|\, \varepsilon_2(\underline{k})$$

pro každé $\underline{k} \in \mathbb{V}^M$ takové, že $b + \underline{k} \in \mathcal{D}(g)$,
kde

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{o}} \|\varepsilon_1(\underline{h})\| = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{\underline{k}\to\underline{o}} \|\varepsilon_2(\underline{k})\| = 0.$$

V (2) položíme $\underline{k} = f(a+\underline{h}) - f(a)$. Levá strana této rovnosti se dá upravit takto:

$$g(b + (f(a+\underline{h}) - f(a))) - g(b) = g(f(a) + f(a+\underline{h}) - f(a)) - g(f(a))$$
$$= g(f(a+\underline{h})) - g(f(a)) = (g\circ f)(a+\underline{h}) - (g\circ f)(a)$$

Přitom pravou stranu rovnosti (2) lze upravit takto:

$$\nabla g(f(a))\cdot(f(a+\underline{h}) - f(a)) + \|f(a+\underline{h}) - f(a)\|\cdot\varepsilon_2(f(a+\underline{h}) - f(a))$$
$$= \nabla g(f(a))\cdot(\nabla f(a)\cdot\underline{h} + \|\underline{h}\|\cdot\varepsilon_1(\underline{h})) + \|\nabla f(a)\cdot\underline{h} + \|\underline{h}\|\cdot\varepsilon_1(\underline{h})\|\cdot$$
$$\cdot\,\varepsilon_2(f(a+\underline{h}) - f(a))$$
$$= \nabla g(f(a))\cdot\nabla f(a)\cdot\underline{h} + \nabla g(f(a))\cdot\|\underline{h}\|\cdot\varepsilon_1(\underline{h}) + \|\nabla f(a)\cdot\underline{h} + \|\underline{h}\|\cdot\varepsilon_1(\underline{h})\|\cdot$$
$$\cdot\,\varepsilon_2(\nabla f(a)\cdot\underline{h} + \|\underline{h}\|\cdot\varepsilon_1(\underline{h}))$$

Z těchto úprav a rovnosti (2) celkově dostáváme

$$(3)\left\{\begin{aligned}(g\circ f)(a+\underline{h}) - (g\circ f)(a) &= \nabla g(f(a))\cdot\nabla f(a)\cdot\underline{h} + \nabla g(f(a))\cdot\|\underline{h}\|\cdot\varepsilon_1(\underline{h})\\ &\quad + \|\nabla f(a)\underline{h} + \|\underline{h}\|\,\varepsilon_1(\underline{h})\|\cdot\varepsilon_2(\nabla f(a)\underline{h} + \|\underline{h}\|\,\varepsilon_1(\underline{h}))\end{aligned}\right.$$

pro každé $\underline{h} \in \mathbb{V}^N$ takové, že $a+\underline{h} \in \mathcal{D}(g\circ f)$ (toto není úplně samozřejmé a správně by se to mělo ověřit).

Podíváme-li se na poslední rovnost pozorně, měli bychom v ní identifikovat rovnost z definice diferenciálu zobrazení $g\circ f$ v bodě a. Pokud by se nám podařilo dokázat, že pro vektorovou funkci

$$\eta(\underline{h}) = \nabla g(f(a))\,\|\underline{h}\|\cdot\varepsilon_1(\underline{h}) + \|\nabla f(a)\underline{h} + \|\underline{h}\|\varepsilon_1(\underline{h})\|\cdot\varepsilon_2(\nabla f(a)\underline{h} + \|\underline{h}\|\,\varepsilon_1(\underline{h}))$$

platí

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{o}} \frac{\|\eta(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|} = 0$$

vyplývalo by z (3), že existuje diferenciál vektorové funkce $g\circ f$ v bodě a a jeho reprezentant je roven $\nabla g(f(a))\cdot\nabla f(a)$.

Což je právě tvrzení naší věty. (b) Platí

$$
(4)\begin{cases}
0 \leq \dfrac{\|\eta(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|} = \dfrac{\|\nabla g(f(a)) \cdot \|\underline{h}\|\varepsilon_1(\underline{h}) + \|\nabla f(a)\underline{h} + \|\underline{h}\|\varepsilon_1(\underline{h})\| \cdot \varepsilon_2(\nabla f(a)\underline{h} + \|\underline{h}\|\varepsilon_1(\underline{h}))\|}{\|\underline{h}\|} \\
\leq \dfrac{\|\nabla g(f(a)) \cdot \|\underline{h}\|\varepsilon_1(\underline{h})\| + \|\nabla f(a)\underline{h} + \|\underline{h}\|\varepsilon_1(\underline{h})\| \cdot \|\varepsilon_2(\nabla f(a)\underline{h} + \|\underline{h}\|\varepsilon_1(\underline{h}))\|}{\|\underline{h}\|} \\
\leq \dfrac{\|\underline{h}\| \cdot \|\nabla g(f(a))\| \cdot \|\varepsilon_1(\underline{h})\| + (\|\nabla f(a)\| \cdot \|\underline{h}\| + \|\underline{h}\| \cdot \|\varepsilon_1(\underline{h})\|) \cdot \|\varepsilon_2(\nabla f(a)\underline{h} + \|\underline{h}\| \cdot \varepsilon_1(\underline{h}))\|}{\|\underline{h}\|} = \\
= \|\nabla g(f(a))\| \cdot \|\varepsilon_1(\underline{h})\| + (\|\nabla f(a)\| + \|\varepsilon_1(\underline{h})\|) \cdot \|\varepsilon_2(\nabla f(a)\underline{h} + \|\underline{h}\| \cdot \varepsilon_1(\underline{h}))\|
\end{cases}
$$

Dokážeme, že poslední výraz jde k nule pro $\underline{h} \to \underline{o}$.

Z definice ε_1 víme, že $\lim\limits_{\underline{h}\to\underline{o}} \|\varepsilon_1(\underline{h})\| = 0$.

Protože

$$0 \leq \|\nabla f(a)\underline{h} + \|\underline{h}\| \cdot \varepsilon_1(\underline{h})\| \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|\underline{h}\| + \|\underline{h}\| \cdot \|\varepsilon_1(\underline{h})\| =$$
$$= \|\underline{h}\| \left(\|\nabla f(a)\| + \|\varepsilon_1(\underline{h})\|\right) \to 0 \text{ pro } \underline{h} \to \underline{o}$$

pak také

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{o}} \|\varepsilon_2(\nabla f(a)\underline{h} + \|\underline{h}\| \cdot \varepsilon_1(\underline{h}))\| = 0$$

(což plyne z věty o limitě složeného zobrazení – kterou jsme sice nezmiňovali, ale intuitivně jeho platnost můžeme tušit z příslušné věty o limitě složené funkce – kterou jsme i dokazovali; možná se tato věta i s důkazem objeví v příloze k této přednášce).

Celkově tedy

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{o}} \|\nabla g(f(a))\| \cdot \|\varepsilon_1(\underline{h})\| + \left(\|\nabla f(a)\| + \|\varepsilon_1(\underline{h})\|\right) \cdot \|\varepsilon_2(\nabla f(a)\underline{h} + \|\underline{h}\| \cdot \varepsilon_1(\underline{h}))\| = 0$$

Aplikujeme věty o dvou policajtech na nerovnost (4) a dostáváme žádanou rovnost

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{\|\eta(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|} = 0.$$

Tím je důkaz věty ukončen. $\square$

Jak již bylo řečeno, jeden z hlavních důsledků této věty je vzorec pro derivování složené funkce více proměnných, tj. vzorec (2) pro $Q = 1$, tedy vzorec

$$(5)\qquad \frac{\partial g\circ f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x))\cdot\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \quad \left(= \sum_{j=1}^{M}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial y_j}\circ f\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}\right](x)\right)$$

pro $i = 1,\dots,N$

<u>Příklad</u> Uvažujme $g : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f = (f_1, f_2)^T : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, kde pro určitost budeme značit

$$g = g(y_1, y_2),\quad f_i = f_i(x_1, x_2, x_3)\quad i = 1,2.$$

Uvažujme složenou funkci $h = g\circ f : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, tzn.

$$h(x_1,x_2,x_3) = g\big(f_1(x_1,x_2,x_3), f_2(x_1,x_2,x_3)\big).$$

Vypočtěte funkce (za předpokladu, že existují a jsou spojité)

$$\frac{\partial g}{\partial y_1}, \frac{\partial g}{\partial y_2}, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\quad \text{pro } i = 1,2,\ j = 1,2,3;$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial h}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial h}{\partial x_3}.$$

<u>Řešení</u> Podle vzorce (5) platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x))\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x))\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x),$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x))\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x))\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x),$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_3}(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x),$$

kde jsme z důvodu úspornosti zápisu psali x místo (x_1, x_2, x_3) a $f(x)$ místo $(f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3))$.

Příklad Uvažujme složenou funkci h z předchozího příkladu. Vypočtěte (ovšem za předpokladu spojitosti příslušných parciálních derivací)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2},\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2},\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3},\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2}.$$

Řešení Vypočteme $\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}$. Zbytek se provede podobně.

Zřejmě
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial y_1} \circ f\right) \cdot f_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y_2} \circ f\right) \cdot f_2\right)(x)$$

Opět použijeme vzorec (5) kde místo g dosadíme $\frac{\partial g}{\partial y_1}$ a $\frac{\partial g}{\partial y_2}$.

Platí

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} = \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f)\right) \cdot f_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f)\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1}}^{\text{věta o derivování součinu}} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial g}{\partial y_2}(f)\right) f_2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y_2}(f)\right) \frac{\partial f_2}{\partial x_1}}^{\text{—〃—}}$$
$$= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y_1^2}(f) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_1 \partial y_2}(f) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) \cdot f_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f)\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_1}(f) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_2^2}(f) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) \cdot f_2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y_2}(f)\right) \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

Nyní stačí ve výrazu provést naznačené násobení.

Příklad Uvažujme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$\varphi(t) = a + t\underline{v} \qquad \forall t \in \langle 0, 1 \rangle$$

kde $a \in \mathbb{R}^2$, $\underline{v} \in \mathbb{V}^2$, $\underline{v} \neq \underline{o}$ (φ je parametrizací úsečky v $\mathbb{R}^2$ s krajními body a, $a + \underline{v}$ – ověřte).

Pro $h = f \circ \varphi$ vypočtěte $h'(t)$ $\forall t \in (0, 1)$ (opět za předpokladu spojitosti funkcí $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$)

Řešení Označme $a = (a_1, a_2)$, $\underline{v} = (v_1, v_2)$. Pak podle vzorce (5) platí

$$h'(t) = \frac{d}{dt} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \frac{d}{dt} f(a_1 + t v_1, a_2 + t v_2)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + t v_1, a_2 + t v_2) \cdot \frac{d}{dt}(a_1 + t v_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + t v_1, a_2 + t v_2) \cdot$$
$$\cdot \frac{d}{dt}(a_2 + t v_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + t\underline{v}) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a + t\underline{v}) \cdot v_2 =$$

$$= \langle \operatorname{grad} f(a + t\underline{v}), \underline{v} \rangle = df(\varphi(t))(\underline{v}).$$

K výsledku je třeba dodat, že diferenciál i gradient existují díky tomu, že $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ jsou podle předpokladu spojité funkce.

Příklad Pokuste se vypočítat $h'(t)$ pro $h = f \circ \varphi$, kde $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ je definované

$$\varphi(t) = a + t\underline{v} \qquad \forall t \in \langle 0, 1 \rangle$$

kde $a \in \mathbb{R}^N$, $\underline{v} \in \mathbb{V}^2$, $\underline{v} \neq \underline{o}$.

Řešení

$$h'(t) = \ldots = df(\varphi(t))(\underline{v}).$$

Výsledky z předchozího příkladu využijeme v důkazu následující věty (kterou jsme již formulovali dříve):

<u>Věta</u> (Taylorova pro funkce N proměnných)
Je dána funkce $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, f má na okolí $\mathcal{U}$ bodu a spojité všechny parciální derivace až do $m+1$-ního řádu.
Pak pro každé $\underline{h} \in \mathbb{V}^N$ takové, že $a+\underline{h} \in \mathcal{U}$ existuje $\tau \in (0,1)$ tak, že

$$f(a+\underline{h}) = f(a) + df(a)(\underline{h}) + \frac{1}{2!} d^2 f(a)(\underline{h}) + \ldots + \frac{1}{m!} d^m f(a)(\underline{h}) + \\ + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(a+\tau \underline{h})(\underline{h}).$$

<u>Důkaz</u> Definujeme funkci

$$F(s) = f(a+s\underline{h}) \qquad \forall s \in \langle 0,1 \rangle$$

(srovnejte s funkcí h z předchozího příkladu).
Zřejmě $F: \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ a $F = f \circ \varphi$, kde

$$\varphi(s) = a + s\underline{h} \qquad \forall s \in \langle 0,1 \rangle.$$

Podle vzorce (5) (nebo také podle posledního příkladu) dostáváme

$$F'(s) = df(a+s\underline{h})(\underline{h}).$$

Derivujeme dále a postupně dostáváme

$$F^{(n)}(s) = d^n f(a+s\underline{h})(\underline{h}) \quad \text{pro } n = 1, \ldots, m+1$$

pro $s \in (0,1)$. Na funkci F aplikujeme Taylorovu větu. $\square$

Dodatek ke kapitole o diferenciálu

V kapitole o diferenciálu jsme zadefinovali tento pojem a poté jsme formulovali a dokazovali věty za předpokladu jeho existence. Jak ale jednoduše zjistit, že daná f vekt. funkce má v daném bodě diferenciál?

Můžeme se inspirovat větou-postačující podmínkou existence diferenciálu funkce více proměnných:

☒ <u>Věta A</u> (Postačující podmínka existence totálního diferenciálu)
Nechť $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}(f))$. Jestliže existuje okolí U bodu a tak, že existují parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

pro VŠECHNA $i = 1, \dots, N$ na okolí U a jsou v bodě a spojité, pak existuje totální diferenciál funkce f v bodě a.

<u>Poznámka</u> Zkráceně řečeno: Má-li f v bodě a spojité všechny parciální derivace (prvního řádu), existuje $df(a)$.

Nemělo by nás tedy překvapit podobné tvrzení pro existenci diferenciálu vektorové funkce.

<u>Věta B</u> (Postačující podmínka existence diferenciálu vekt. funkce)
Nechť $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}(f))$. Jestliže existuje okolí U bodu a tak, že existují parciální derivace

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

pro VŠECHNA $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$ na okolí U a jsou v bodě a spojité, pak existuje diferenciál vektorové funkce f v bodě a.

<u>Poznámka</u> Zkráceně řečeno: Jsou-li v bodě a spojité všechny parciální derivace (prvního řádu) všech složek vektorové funkce f, pak existuje $df(a)$.

Tuto větu si dokážeme. K tomu budeme potřebovat jedno pomocné tvrzení

<u>Lemma</u> Nechť $f = (f_1, f_2, \dots, f_M)^T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}(f))$. Jestliže existují diferenciály $df_j(a)$ pro všechna $j = 1, \dots, M$, pak existuje $df(a)$.

<u>Důkaz</u> Z předpokladu plyne, že platí

$$f_j(a+\underline{h}) - f_j(a) = df_j(a)(\underline{h}) + \sigma_j(\underline{h})$$

pro $\forall\, \underline{h} \in \mathbb{V}^N$ takové, že $a + \underline{h} \in \mathcal{D}(f_j)$, kde $\sigma_j : \mathbb{V}^N \to \mathbb{R}$ splňuje podmínku

$$(\Diamond) \qquad \lim_{\underline{h} \to \underline{o}} \frac{\sigma_j(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = 0$$

pro každé $j = 1, \dots, M$.

Zapíšeme-li tyto rovnosti do vektoru, dostáváme

$$f(a+\underline{h}) - f(a) = \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \nabla f_2(a) \\ \vdots \\ \nabla f_M(a) \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \underline{h} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1(\underline{h}) \\ \sigma_2(\underline{h}) \\ \vdots \\ \sigma_M(\underline{h}) \end{pmatrix}}_{=:\sigma(\underline{h})},$$

kde $\sigma : \mathbb{V}^N \to \mathbb{V}^M$. Dokážeme-li, že platí

$$\lim_{\underline{h} \to \underline{o}} \frac{\sigma(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = \underline{o}$$

plyne z toho, že f má diferenciál v bodě a (a dokonce i to že A je ~~jeho~~ Jacobiho matice vektorové funkce v bodě a, nebo-li $A = \nabla f(a)$).

Platí

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{\underline{\sigma}(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} \\ \vdots \\ \frac{\sigma_M(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} \end{pmatrix} \overset{\text{přemosťovací věta}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{\sigma_1(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} \\ \vdots \\ \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{\sigma_M(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} \end{pmatrix} \overset{(\diamond)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}. \qquad \square$$

Nyní přikročíme k důkazu věty B.

<u>Důkaz</u> Jestliže existují $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ na okolí U bodu a, a jsou spojité pro $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, pak podle věty A existují diferenciály $df_j(a)$ pro každé $j = 1, \dots, M$. Z předchozího lemmatu plyne, že také existuje diferenciál $df(a)$. $\square$