Implicitně zadané funkce a zobrazení

Funkce jedné proměnné

Občas se setkáme s problémem načrtnutí křivky (v rovině), která je dána rovnicí

$$(1) \qquad F(x,y) = 0,$$

kde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Řečeno v terminologii funkcí více proměnných: „Načrtněte 0-hladinu funkce F (kterou jsme zvykli značit symbolem „$H_0(F)$“)“. Viz následující příklady:

<u>Příklad 1</u> Načrtněte křivku zadanou rovnicí

$$(2) \qquad y - x^2 + 1 = 0.$$

<u>Řešení</u> Nejprve zdůrazníme fakt, že se jedná o rovnici typu (1) pro $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$F(x,y) = y - x^2 + 1, \qquad (x,y)^T \in \mathbb{R}^2.$$

Nyní k samotnému řešení úlohy: Rovnici (2) lze přepsat do tvaru

$$y = x^2 - 1.$$

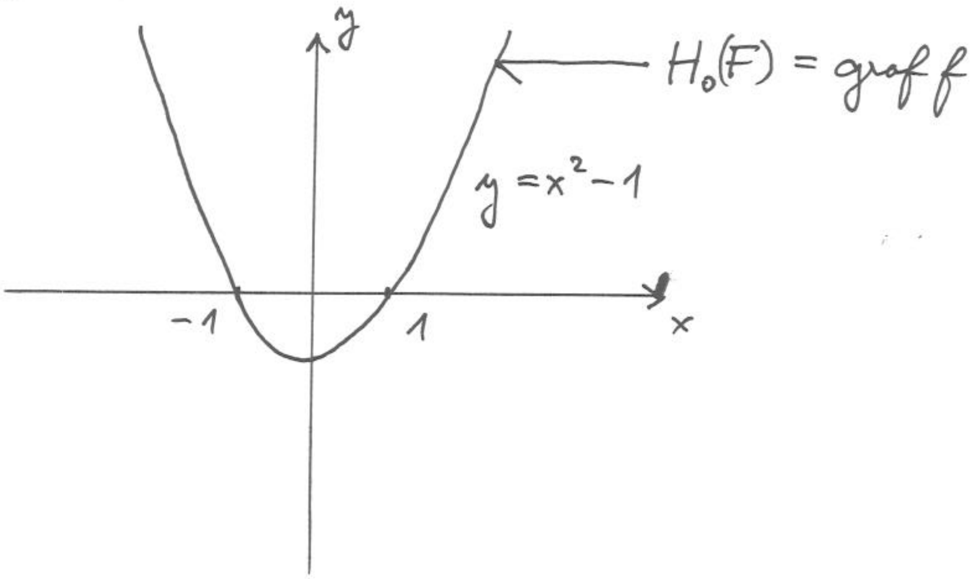
Je tedy jasné, že bod $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ bude splňovat tuto rovnici právě tehdy, když bude ležet v grafu funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je definovaná předpisem

$$f(x) = x^2 - 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Jinými slovy:

$$(x,y)^T \text{ splňuje } (2) \iff (x,y)^T \in \text{graf } f \iff y = f(x).$$

Graf funkce f umíme načrtnout. Výsledkem je tedy následující křivka:



Příklad 2 Načrtněte křivku popsanou rovnicí

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

Řešení Tato rovnice žádnou křivku neurčuje, protože pro každé $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ platí

$$x^2 + y^2 + 1 \geq 1 > 0,$$

tedy rovnost není nikdy splněna.

Příklad 3 Načrtněte křivku popsanou rovnicí

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Řešení Protože pro všechna $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ je $x^2 + y^2$ nezáporné číslo rovnající se nule právě tehdy, když $x = 0$ a $y = 0$, plyne odsud, že „křivku" tvoří pouze počátek, tj. bod

$$(0,0)^T.$$

<u>Příklad 4</u> Načrtněte křivku popsanou rovnicí

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

<u>Řešení</u> Všichni si asi ze střední školy pamatují, že rovnice

$$x^2 + y^2 = 1$$

popisuje kružnici o středu v počátku a poloměru 1 (říkáme jí „jednotková kružnice"). Pokud bychom toto nevěděli, můžeme postupovat stejně jako v příkladu 1 – upravíme rovnici tak, abychom z ní dostali předpis nějaké funkce a poté nakreslíme její graf.

Platí

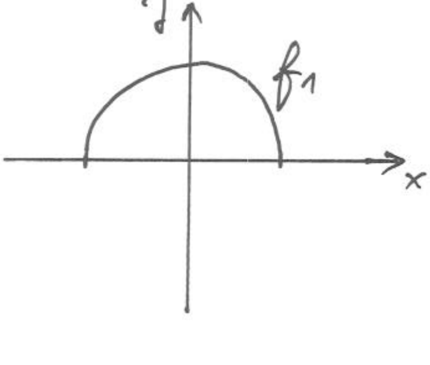
$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y^2 = 1 - x^2$$

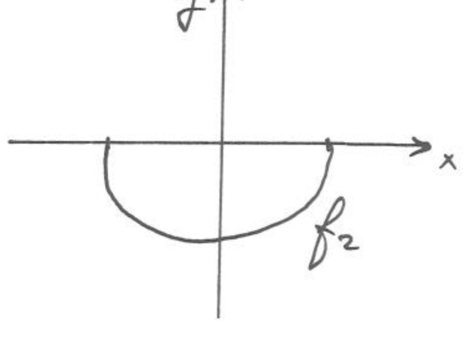
$$y = \sqrt{1-x^2},\ x \in \langle -1, 1\rangle \qquad\qquad y = -\sqrt{1-x^2},\ x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Dostali jsme tentokrát ~~graf~~ dvě funkce. Nemělo by nás to překvapit; už kvůli tomu, že kružnice není grafem žádné funkce. Načrtneme grafy funkcí

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle$$

$$f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle.$$





Vidíme, že jejich sjednocení je právě jednotková kružnice.

<u>Příklad 5</u> Načrtněte křivku danou rovnicí

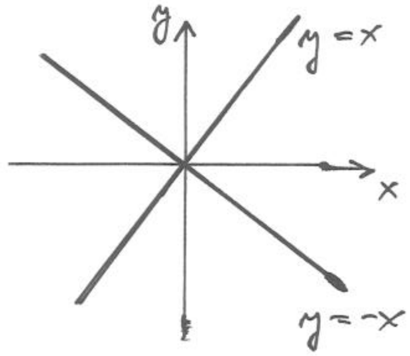
$$x^2 - y^2 = 0$$

<u>Řešení</u> Můžeme rovnici upravit na

$$(x-y)(x+y) = 0$$

$$y = x,\ x \in \mathbb{R} \qquad\qquad y = -x,\ x \in \mathbb{R}$$

Tedy opět dostáváme předpisy dvou funkcí. Výsledkem bude sjednocení přímek s rovnicemi $y = x$ a $y = -x$.

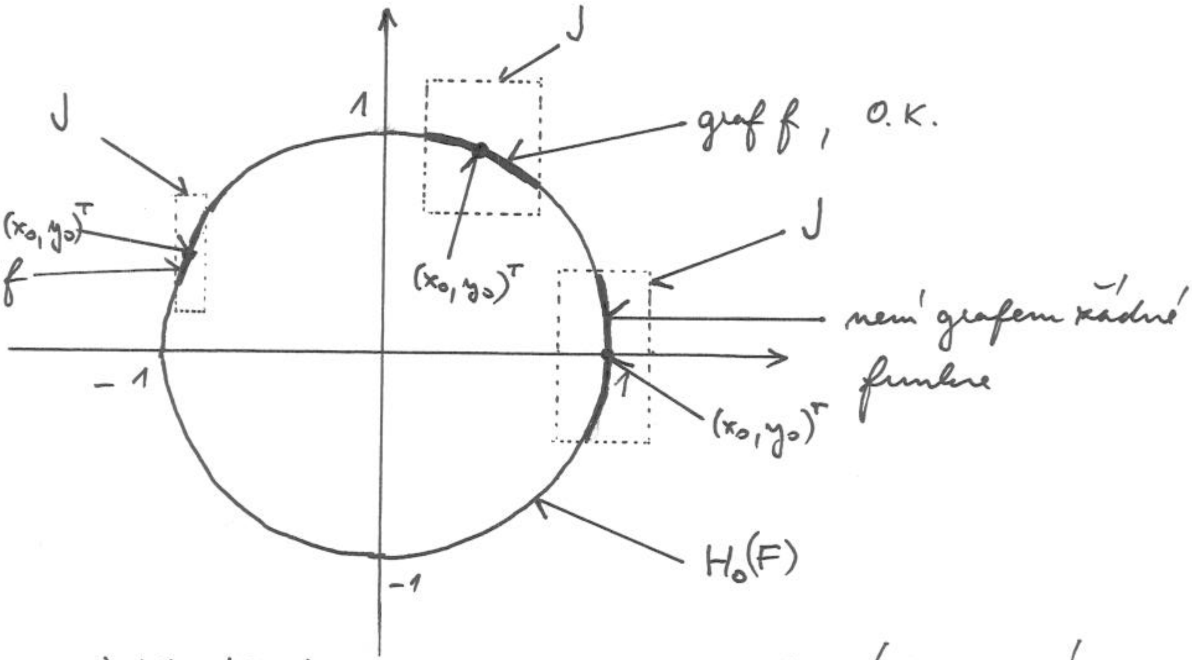


Odpovězme nyní na otázku: „Je možné, aby množina $H_0(F)$ (= množina všech řešení rovnice ~~F~~(1)) byla grafem nějaké funkce jedné proměnné?"
V příkladech 1 a 3 tomu tak bylo, v příkladech 4 a 5 už ne (příklad 2 nás příliš nezajímá – v něm to také nešlo).
Tedy obecně je odpověď na naši otázku záporná. Položme jinou otázku – a to „jestli je množina $H_0(F)$ grafem nějaké funkce alespoň v nějakém okolí bodu $(x_0, y_0)^T \in H_0(F)$."
Přesněji: „Je dán bod $(x_0, y_0)^T \in H_0(F)$. Existuje interval $J = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ a funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

definovaná na intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ s funkčními hodnotami v intervalu $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ tak, že

$$\text{graf } f = H_0(F)\cap J \ ?"$$

K pochopení naší otázky použijeme příklad 4. Množinou $H_0(F)$ je jednotková kružnice. Určeme z obrázku, ~~které~~ pro které body $(x_0, y_0)^T \in H_0(F)$ můžeme na naši otázku odpovědět kladně.



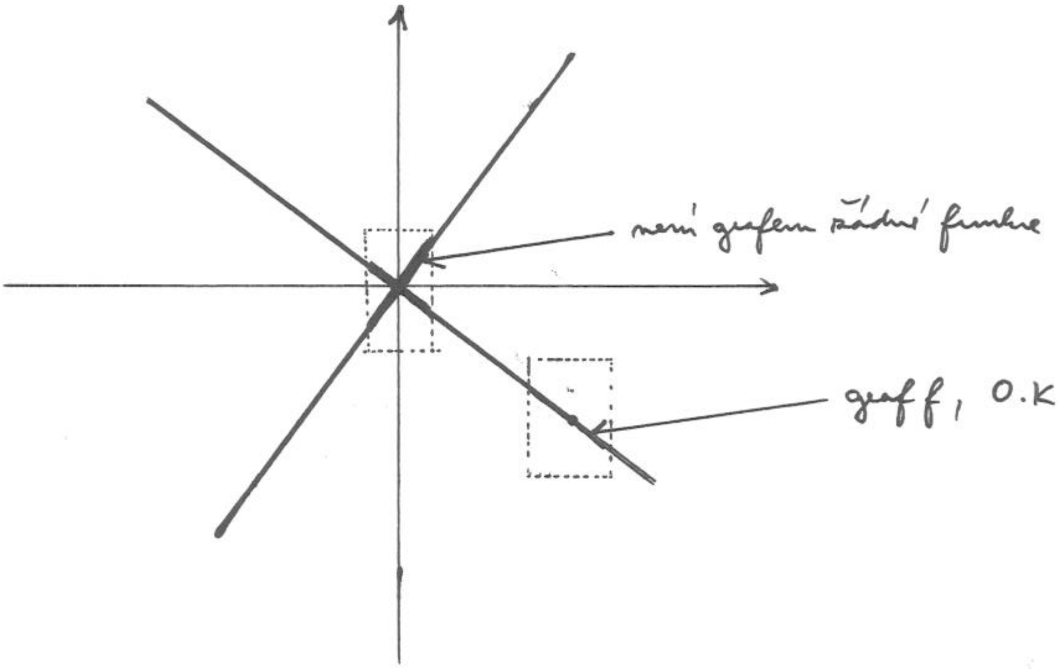
Z obrázku je vidět, že jediné dva body, u kterých odpovíme na otázku záporně jsou body

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}.$$

Podívejme se ještě na příklad 5. Zde je problematický pouze počátek, tedy bod

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

– viz obrázek :



Ještě dodejme, že v příkladu 1 odpovíme u všech bodů kladně.

To znamená následující: V těch bodech, ve kterých jsme odpověděli kladně nám funkce F jednoznačně určuje pomocí rovnice (1) reálnou funkci jedné reálné proměnné f definovanou na intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Navíc, funkční hodnoty této funkce leží v intervalu $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ a platí

$$F(x, f(x)) = 0 \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Tyto poznatky nás mohou motivovat k následující definici.

<u>Definice 6</u> Nechť $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0)^T \in \cancel{\mathbb{R}^2} H_0(F)$. Jestliže existují čísla $\delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ a funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ tak, že platí

$$\text{graf } f = H_0(F) \cap (x_0-\delta, x_0+\delta) \times (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon),$$

pak říkáme, že v okolí bodu $(x_0, y_0)^T$ je definována funkce f implicitně rovnicí (1).

<u>Poznámka 7</u> Podmínka $(x_0,y_0)^T \in H_0(F)$ neznamená nic jiného než fakt, že $(x_0,y_0)^T$ řeší (1), tzn. $F(x_0,y_0)=0$.

<u>Poznámka 8</u> Funkci f definovanou v okolí bodu $(x_0,y_0)^T$ rovnicí (1) lze charakterizovat také pomocí následujících dvou podmínek:

$$F(x,f(x))=0 \qquad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

a

$$y_0=f(x_0).$$

Uvedená definice vznáší celou řadu otázek:

(i) Co musí funkce F splňovat, aby v okolí daného bodu $(x_0,y_0)\in H_0(F)$ byla implicitně definována funkce rovnicí (1)?

(ii) Co platí pro derivaci funkce f? Čemu se rovná $f'(x_0)$? Musíme k jejímu výpočtu znát funkční předpis funkce f?

Tyto otázky nabydou na významu, uvědomíme-li si, že na rozdíl od příkladů zde uvedených, nebudeme většinou schopni určit funkční předpis funkce f. Třeba se pokuste najít funkční předpis funkce f, která je dána implicitně rovnicí

$$x^3+y^3=6xy^4.$$

Po marném úsilí zjistíte, že to buď nejde nebo je to extrémně složité. Proto budeme klást otázky (i) a (ii) – a nakonec na ně odpovíme. To se částečně provede v následující větě.

<u>Věta 9</u> Nechť $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x_0,y_0)^T\in H_0(F)$. Jestliže
(a) F je spojitá na okolí bodu $(x_0,y_0)^T$,
(b) $\frac{\partial F}{\partial y}$ je spojitá v bodě $(x_0,y_0)^T$
(c) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$,
pak je v okolí bodu $(x_0,y_0)^T$ definována funkce f implicitně rovnicí (1). Tato funkce je spojitá.

<u>Důkaz</u> <u>KROK 1</u> Nejprve ukážeme, že v okolí bodu $(x_0,y_0)^T$ je definována implicitně funkce f rovnicí (1), tzn., že existují $\delta>0$ a $\varepsilon>0$ a funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definovaná na $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ splňující

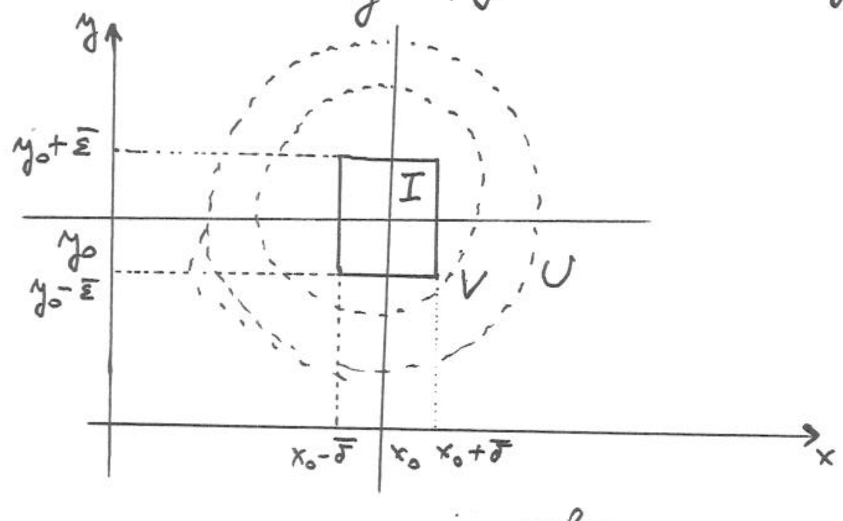
$$\operatorname{graf} f = H_0(F)\cap (x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon).$$

Podle předpokladu (a) existuje okolí U bodu $(x_0,y_0)^T$ takové, že f je na U spojitá. Podle předpokladu (c) je $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$ nenulové. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že

$$(3)\qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)>0$$

(pokud by toto číslo bylo záporné, stačí místo funkce F uvažovat funkci $-F$). Z (3) a (b) plyne existence okolí V bodu $(x_0,y_0)^T$ takového, že

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)>0\qquad \forall (x,y)^T\in V.$$



Zřejmě existuje interval $I = \langle x_0-\bar{\delta}, x_0+\bar{\delta}\rangle \times \langle y_0-\bar{\varepsilon}, y_0+\bar{\varepsilon}\rangle$ $(\bar{\delta}>0, \bar{\varepsilon}>0)$ takový, že

$$I \subset U \cap V.$$

(viz obrázek).
Celkově tedy platí

F je spojitá, $\frac{\partial F}{\partial y}$ je kladná v každém bodě z I.

Definujeme funkci $g(y) = F(x_0, y)$ pro $y \in \langle y_0-\bar{\varepsilon}, y_0+\bar{\varepsilon}\rangle$.
Zřejmě $g(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$ a

$$g'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) > 0 \qquad \forall y \in (y_0-\bar{\varepsilon}, y_0+\bar{\varepsilon}).$$

Z těchto faktů plyne, že

$$g(y)>0 \quad \forall y \in (y_0, y_0+\bar{\varepsilon}\rangle, \; g(y)<0 \quad \forall y \in \langle y_0-\bar{\varepsilon}, y_0).$$

Pak

$$F(x_0, y_0+\bar{\varepsilon}) = g(y_0+\bar{\varepsilon}) > 0 \quad \text{a} \quad F(x_0, y_0-\bar{\varepsilon}) = g(y_0-\bar{\varepsilon}) < 0.$$

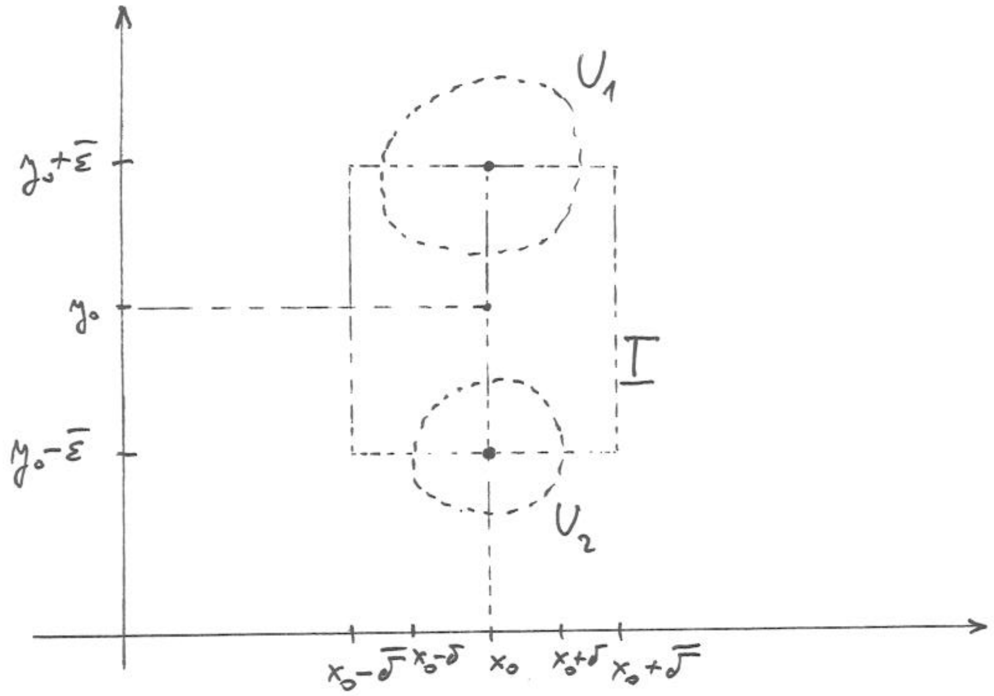
Protože F je spojitá v bodech $(x_0, y_0+\bar{\varepsilon})$ a $(x_0, y_0-\bar{\varepsilon})$, existují okolí U_1 bodu $(x_0, y_0+\bar{\varepsilon})$ a okolí U_2 bodu $(x_0, y_0-\bar{\varepsilon})$ taková, že

$$F > 0 \text{ na } U_1, \quad F < 0 \text{ na } U_2.$$

Označme symbolem δ minimum z jejich poloměrů.
Pak zřejmě

$$(4) \qquad F(x, y_0+\bar{\varepsilon}) > 0 \wedge F(x, y_0-\bar{\varepsilon}) < 0 \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

– sledujte obrázek:



Zvolme nyní libovolné (ale v tuto chvíli pevné) $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ a definujme funkci

$$g_x(y) = F(x,y), \qquad y \in \langle y_0-\bar\varepsilon, y_0+\bar\varepsilon\rangle.$$

Z definice δ víme, že

$$g_x(y_0+\bar\varepsilon) > 0 \quad \text{a} \quad g_x(y_0-\bar\varepsilon) < 0.$$

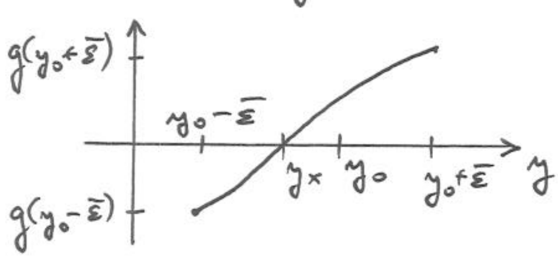
Protože je g_x na $\langle y_0-\bar\varepsilon, y_0+\bar\varepsilon\rangle$ spojitá, existuje alespoň jeden bod $y_x \in (y_0-\bar\varepsilon, y_0+\bar\varepsilon)$ takový, že

$$g_x(y_x) = 0 \quad (\text{tedy } F(x,y_x) = 0).$$

Protože navíc

$$g_x'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0 \qquad \forall y \in (y_0-\bar\varepsilon, y_0+\bar\varepsilon)$$

je g_x rostoucí a tedy číslo y_x je jediné! Viz obrázek:



Definujeme funkci

$$f(x) = y_x, \qquad x \in (x_0-\delta, x_0+\delta),$$

položíme $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$.
Vzhledem ke konstrukci f je vidět, že je právě jediná funkcí, která je v okolí bodu $(x_0, y_0)^T$ definována implicitně rovnicí (1).

KROK 2 Nyní dokážeme, že f je spojitá na $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Bez újmy na obecnosti stačí dokázat, že f je spojitá v bodě x_0.
Máme tedy dokázat, že

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \; \exists \tilde{\delta} > 0 \; \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) : |x-x_0| < \tilde{\delta} \Rightarrow |f(x)-y_0| < \tilde{\varepsilon}.$$

Důkaz bude kopírovat začátek kroku 1. Zvolme libovolné $\tilde{\varepsilon} > 0$, přičemž má smysl brát $\tilde{\varepsilon}$ menší než ε (v opačném případě, tj. když $\tilde{\varepsilon} \geq \varepsilon$, pak stačí položit $\tilde{\delta} = \delta$).
Z kroku 1 víme, že

$$F(x_0, y_0+\tilde{\varepsilon}) > 0 \quad \text{a} \quad F(x_0, y_0-\tilde{\varepsilon}) < 0.$$

Ze spojitosti F v bodech $(x_0, y_0+\tilde{\varepsilon})$ a $(x_0, y_0-\tilde{\varepsilon})$ plyne existence okolí V_1 bodu $(x_0, y_0+\tilde{\varepsilon})$ a okolí V_2 bodu $(x_0, y_0-\tilde{\varepsilon})$ takových, že

$$F > 0 \text{ na } V_1, \quad F < 0 \text{ na } V_2.$$

Označme $\tilde{\delta}$ jako minimum z poloměrů těchto okolí.
Pak

$$F(x, y_0-\tilde{\varepsilon}) > 0 \quad \text{a} \quad F(x, y_0+\tilde{\varepsilon}) < 0 \qquad \forall x \in (x_0-\tilde{\delta}, x_0+\tilde{\delta}).$$

Odtud a z konstrukce funkce f plyne, že

$$f(x) \in (y_0-\tilde{\varepsilon}, y_0+\tilde{\varepsilon}) \qquad \forall x \in (x_0-\tilde{\delta}, x_0+\tilde{\delta})$$

jinými slovy

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) : \quad |x-x_0|<\tilde{\delta} \Rightarrow |f(x)-y_0|<\tilde{\varepsilon}. \qquad \square$$

Nyní se podíváme, jak je to s derivací funkce dané implicitně.

<u>Věta 10</u> Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty. Navíc, nechť funkce F má v bodě (x_0, y_0)[5] parciální derivaci podle x. Pak existuje $f'(x_0)$ a platí

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

<u>Důkaz</u> Uvažujme $\delta>0$, $\varepsilon>0$ a funkci f z tvrzení věty 9. Zvolme $0<|h|<\delta$. Vzhledem k tomu, že

$$F(x_0+h, f(x_0+h)) = F(x_0, y_0) = 0$$

platí

$$(5)\left\{\begin{aligned} 0 &= F(x_0+h, y_0) - F(x_0+h, y_0) = \\ &= F(x_0+h, y_0) - F(x_0, y_0) + F(x_0+h, f(x_0+h)) - \\ &\quad - F(x_0+h, y_0) = \\ &= F(x_0+h, y_0) - F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0+h, \xi(h))\,(f(x_0+h)-y_0) \end{aligned}\right.$$

kde $\xi(h)$ ~~$\in($~~ leží mezi $f(x_0+h)$ a $y_0=f(x_0)$ jsme dostali z Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Zřejmě

$$0 \le |\xi(h) - y_0| \le |f(x_0+h) - f(x_0)|$$

což se spojitostí f v x_0 implikuje, že

$$(6) \qquad \lim_{h\to 0} \xi(h) = y_0.$$

Podělíme-li (5) číslem h, dostáváme

$$0 = \frac{F(x_0+h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0+h, \xi(h)) \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

a tedy

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -\frac{\frac{F(x_0+h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h}}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0+h, \xi(h))}.$$

Zřejmě

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$$

a z (6) plyne $\lim_{h\to 0} (x_0+h, \xi(h))^T = (x_0, y_0)^T$, tedy z (R) plyne

$$\lim_{h\to 0} \frac{\partial F}{\partial y}(x_0+h, \xi(h)) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0). \qquad \square$$

Dokonce můžeme dokázat následující větu – pro její důkaz viz [Rachůnek]:

<u>Věta 11</u> (o funkci dané implicitně) Nechť $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má na otevřené množině $D \subset \mathbb{R}^2$ spojité všechny parciální derivace až do řádu $m \in \mathbb{N}$ včetně; $(x_0, y_0)^T \in D \cap H_0(F)$. Jestliže platí

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

pak je v okolí bodu $(x_0, y_0)^T$ definována funkce f implicitně rovnicí (1). Tato funkce má spojité derivace až do řádu m (včetně) a platí

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \qquad \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

<u>Poznámka 12</u> Speciálně pro $m = 1$ jsme schopni větu dokázat z předchozích úvah – pokuste se o to.

Prakticky budeme počítat derivace implicitně zadané funkce pomocí věty o diferenciálu složeného zobrazení.
Platí-li

$$F(x, f(x)) = 0 \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

a F má spojité derivace prvního řádu a funkce f má derivaci, pak

$$0 = \frac{d}{dx}\left(F(x,f(x))\right) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))\cdot(x)' + \frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))\cdot f'(x) =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))f'(x).$$

Po úpravě dostáváme již známý vzorec

$$(7) \qquad f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}.$$

~~Zajímala-li by nás~~ Zajímá-li nás druhá derivace, můžeme pokračovat takto:

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))f'(x)\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,f(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,f(x))f'(x) + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,f(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,f(x))f'(x)\right]\cdot$$
$$\cdot f'(x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))\cdot f''(x) =$$
$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,f(x)) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,f(x))f'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,f(x))f'^2(x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))f''(x).$$

A to za předpokladu, že F má spojité všechny parciální derivace druhého řádu. Po úpravě dostáváme

$$(8) \qquad f''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,f(x)) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,f(x))f'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,f(x))f'^2(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}.$$

Lokální extrémy funkce zadané implicitně

Vyjdeme ze základních metod hledání lokálních extrémů funkcí jedné proměnné:

- pokud má funkce f lokální extrém v bodě x_0 a má v něm derivaci, pak $f'(x_0) = 0$ (připomeňme, že bodům x_0, pro které platí $f'(x_0) = 0$, se říká stacionární body funkce f a tato funkce v nich nemusí nabývat extrému)
- pro stacionární bod x_0 funkce f platí:
  (a) je-li $f''(x_0) > 0$, pak nabývá funkce f v bodě x_0 ostrého lokálního minima
  (b) je-li $f''(x_0) < 0$, pak nabývá funkce f v bodě x_0 ostrého lokálního maxima

To samozřejmě platí i pro funkci danou implicitně – – vždyť je to funkce jako každá jiná. Jediná odlišnost spočívá v tom, že čísla $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$ nebudeme počítat z funkčního předpisu funkce f (protože ho neznáme), ale z rovnice (1) resp. ze vzorců (7), (8).

Postup bude vysvětlen na příkladu:

<u>Příklad 13</u> Nalezněte lokální extrémy funkcí dané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 = 1 .$$

<u>Řešení</u> Nejjednodušší by bylo využít výsledků z příkladu 4, v němž jsme našli dokonce funkční předpisy všech funkcí daných implicitně touto rovnicí. My zde zvolíme postup obecný, jako bychom příklad 4 neznali – využijeme jeho výsledky pouze pro kontrolu.

Zadána je tedy funkce
$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1,$$
která má na $\mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace všech řádů.
Postup rozdělíme do dvou kroků:

<u>1. Nalezení stacionárních bodů</u> – nejprve nalezneme všechny body $(x_0, y_0)^T$ v jejichž okolí je implicitně definována funkce f rovnicí (1) a platí
$$f'(x_0) = 0$$
(takovému bodu budeme říkat stacionární bod – POZOR: nemá nic společného se stacionárním bodem funkce F).
Tento bod bude řešením soustavy rovnic

$$F(x,y) = 0 \quad \left(\text{aby } (x_0, y_0)^T \in H_0(F)\right),$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \left(\text{aby } f'(x_0) = 0\right)$$

a navíc musí být splněno
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \quad \left(\text{aby } f \text{ i } f'(x_0) \text{ existovala}\right)$$

V našem příkladě řešíme soustavu
$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
$$2x = 0,$$
která má dvě řešení $(0,-1)^T$, $(0,1)^T$. Protože

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,-1) = -2 \neq 0 \ \wedge \ \frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2 \neq 0$$

můžeme je prohlásit za stacionární body rovnice (1).
Pro určitost označme f_1 (resp. f_2) funkci danou implicitně v okolí bodu $(0,-1)^T$ (resp. $(0,1)^T$) pomocí (1).

<u>2. Stanovení extrémů</u> – v první části jsme našli bod $(x_0, y_0)^T$ (popř. více takových bodů) v jehož okolí je definována implicitně funkce f rovnicí (1) taková, že $f'(x_0) = 0$ (a $f(x_0) = y_0$).

K vyšetření, zda funkce f má v x_0 lokální extrém, stačí vyšetřit znaménko $f''(x_0)$. Z (8) dostáváme

$$f''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} .$$

Stačí tedy jen dosadit.
V našem příkladě máme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = 2$$

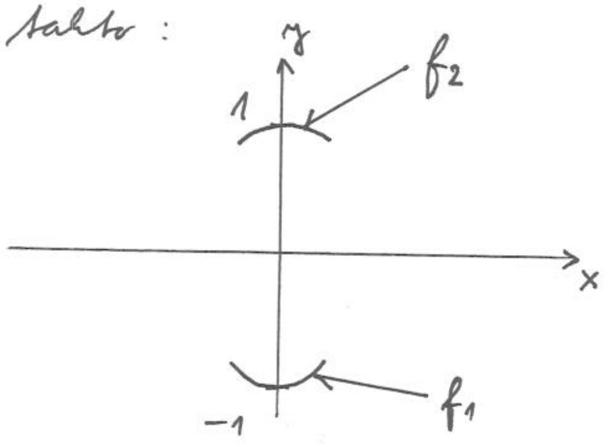
tedy pro stacionární bod $(0,-1)^T$ máme

$$f_1''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,-1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,-1)} = -\frac{2}{-2} = 1 > 0$$

a pro stacionární bod $(0,1)^T$ máme

$$f_2''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = -\frac{2}{2} = -1 < 0 .$$

<u>Závěr</u>: Funkce f_1 definovaná implicitně v bodě $(0,-1)^T$ má v bodě 0 ostré lokální maximum -1 a funkce f_2 definovaná implicitně v bodě $(0,1)^T$ má v bodě 0 ostré lokální minimum. Náš výsledek bychom mohli načrtnout takto:



Náš výsledek je zcela ve shodě s výsledky příkladu 4.

Funkce více proměnných

Naše úvahy budeme postupně zobecňovat. Věty v této kapitole budou uvedeny bez důkazů – jejich myšlenku lze převzít z předchozích úvah.

Uvažujme funkci $F : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ (kde $N \in \mathbb{N}$) a rovnici

$$(9) \qquad F(x_1, x_2, \dots, x_N, y) = 0.$$

Opět se budeme ptát, zda existuje funkce f (tentokrát funkce N proměnných $x_1, \dots, x_N$) taková, že pro každé $x_1, \dots, x_N, y$ platí

$$y = f(x_1, \dots, x_N) \quad \Leftrightarrow \quad F(x_1, \dots, x_N, y) = 0$$

tedy zda lze pomocí rovnice (9) definovat implicitně funkci N proměnných (všimněme si faktu, že případ $N = 1$ jsme uvažovali v předešlé části – a úspěšně „vyřešili")

Než uvedeme pořádnou definici, podívejme se opět na příklad.

<u>Příklad 13</u> Načrtněte množinu bodů $(x, y, z)^T$ splňujících rovnici

$$(10) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

<u>Řešení</u> Ze střední školy víme, že tato množina je právě jednotková sféra (kulová plocha) o středu v počátku a poloměru 1. Kdybychom to nevěděli, můžeme si pomoct následovně.

Rovnici lze upravit do tvaru

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2$$

a tedy

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \vee \quad z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$$

přičemž (x,y) leží v množině

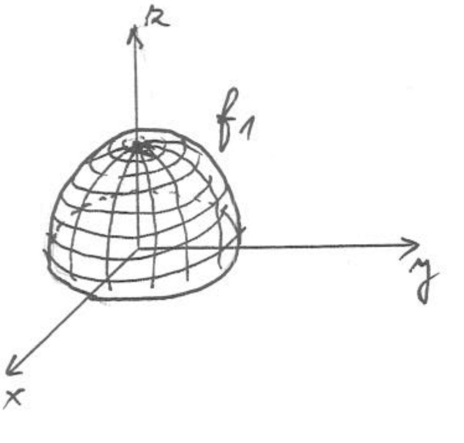
$$\overline{K(0,1)} = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \le 1\}$$

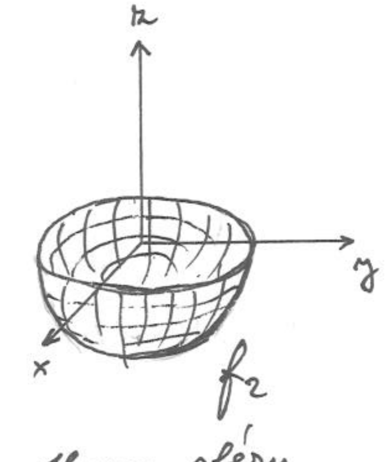
(tedy v kruhu).

<u>Závěr</u> Bod $(x,y,z)^T$ je řešením rovnice (10) právě tehdy, když leží v grafu funkce f_1 nebo v grafu funkce f_2, které jsou definované na $\overline{K(0,1)}$ předpisy

$$f_1(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad f_2(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$$

K vykreslení grafů těchto funkcí lze využít např. nějaký matematický software. Měli bychom dostat něco takového:





Sjednocením grafů f_1 a f_2 dostáváme jednotkovou sféru.

Než uvedeme definici funkce více proměnných dané implicitně, zavedeme si pro jednoduchost trochu jiné značení:

Funkci $F = F(x_1,\dots,x_N,y)$ budeme zapisovat jako

$$F = F(x,y)$$

kde $x = (x_1,\dots,x_N)$. Dále místo bodu $(x_1^{[0]}, x_2^{[0]},\dots,x_N^{[0]}, y_0)^T$ budeme psát zjednodušeně

$$(x^{[0]}, y_0)^T$$

kde $x^{[0]} = (x_1^{[0]},\dots,x_N^{[0]})^T$.

[Správně bychom měli, vzhledem k tomu, že vektory chápeme sloupcově, psát $(x_1^{[0]},\dots,x_N^{[0]},y_0)^T = ((x^{[0]})^T, y_0)^T$, kde $x^{[0]} = (x_1^{[0]},\dots,x_N^{[0]})^T$. To by ale zkomplikovalo zápis.]

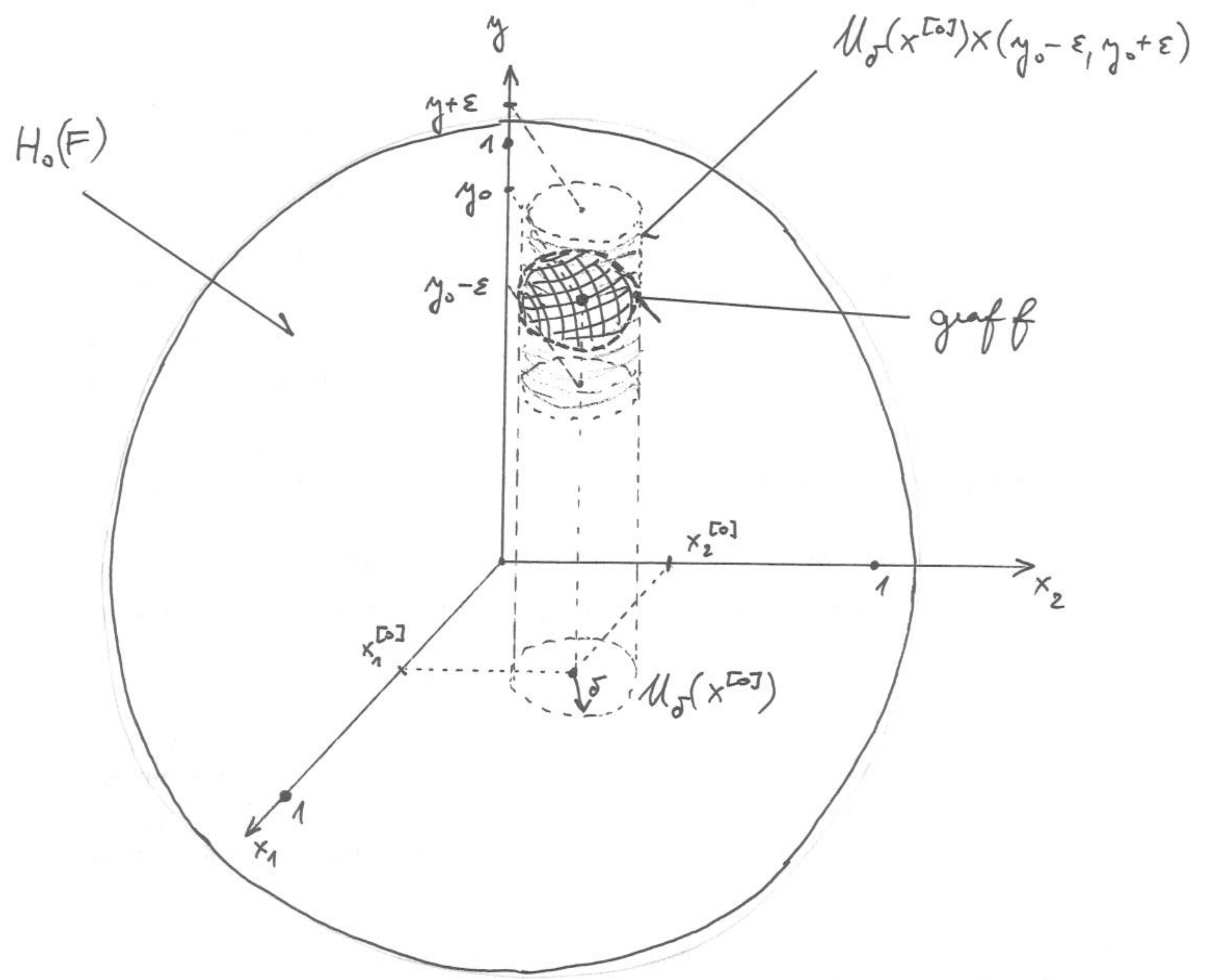
Definice 14 Nechť $F:\mathbb{R}^{N+1}\to\mathbb{R}$, $(x^{[0]},y_0)^T\in H_0(F)$. Jestliže existují čísla $\delta>0$ a $\varepsilon>0$ a funkce $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ definovaná na okolí $U_\delta(x^{[0]})$ bodu $x^{[0]}$ tak, že platí

$$\mathrm{graf}\, f = H_0(F)\cap U_\delta(x^{[0]})\times(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$$

pak říkáme, že v okolí bodu $(x^{[0]},y_0)^T$ je definována funkce f implicitně rovnicí (9).

Poznámka 15 Je nutno připomenout, že definice 14 je pro $N=1$ totožná s definicí 6.

Definici 14 můžeme přiblížit obrázkem na ~~[illegible]~~ němž je vykreslen $H_0(F)$ pro $F(x_1,x_2,y) = x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 1$ (viz příklad 13), a graf funkce dané implicitně v okolí bodu $(x^{[0]},y_0)^T$.



Bez důkazu uvedu zobecnění věty 9. Důkaz je relativně jednoduchý – jde o postup použitý v důkazu věty 9.

<u>Věta 16</u> Nechť $F : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$, $(x^{[0]}, y_0)^T \in H_0(F)$. Jestliže

(a) F je spojitá na okolí bodu $(x^{[0]}, y_0)^T$,

(b) $\frac{\partial F}{\partial y}$ je spojitá v bodě $(x^{[0]}, y_0)^T$,

(c) $\frac{\partial F}{\partial y}(x^{[0]}, y_0) \neq 0$,

pak je v okolí bodu $(x^{[0]}, y_0)^T$ definována funkce f implicitně rovnicí (9). Tato funkce je spojitá.

Opět bez důkazu uvedu zobecnění věty 10. Opět je důkaz relativně jednoduchý a sleduje důkaz věty 10.

<u>Věta 17</u> Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty. Navíc, nechť funkce F má v bodě $(x^{[0]}, y_0)^T$ parciální derivaci podle x_i ($i \in \{1, \dots, N\}$). Pak existuje $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{[0]})$ a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{[0]}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^{[0]}, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x^{[0]}, y_0)} .$$

Jako hlavní tvrzení této kapitoly bude věta, která zobecňuje větu 11.

<u>Věta 18</u> (o funkci více proměnných dané implicitně)
Nechť $F : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ má na otevřené množině $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ spojité všechny parciální derivace až do řádu $m \in \mathbb{N}$ včetně; $(x^{[0]}, y_0)^T \in D \cap H_0(F)$.
Jestliže platí

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x^{[0]}, y_0) \neq 0$$

pak je v okolí bodu $(x^{[0]}, y_0)^T$ definována funkce N proměnných f implicitně rovnicí (9). Tato funkce má spojité všechny parciální derivace až do řádu m (včetně) a platí

$$\forall i = 1, \dots, N \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \qquad \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

<u>Poznámka 19</u> Poslední rovnost lze napsat elegantně jako

$$\nabla f(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \qquad \forall x \in \mathcal{D}(f),$$

kde $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ je definována jako „parciální derivace podle vektoru x", a to jako řádkový vektor

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x,y), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N}(x,y)\right).$$

Tento vektor lze chápat jako gradient funkce $G_y(x_1,\dots,x_N) = F(x_1,\dots,x_N,y)$ pro pevně zvolené $y \in \mathbb{R}$ – správná definice je pak takováto:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) := \nabla G_y(x).$$

<u>Poznámka 20</u> Podobně jako u funkce jedné proměnné, i zde bychom mohli vyšetřovat lokální extrémy – na to již není čas.

<u>Implicitně zadané zobrazení (vektorová funkce)</u>

Naše zobecňování ukončíme definováním implicitně zadané vektorové funkce a formulováním věty o existenci a „derivaci"!

Úvahy v předchozích kapitolách byly motivovány potřebou načrtnutí 0-hladiny nějaké funkce (funkce F). Zobecnění, které provedeme v této kapitole, již bude mnohem složitější; uvedeme tedy jinou motivaci a jiný pohled na smysl definic 6 a 14.

Definici 6 bychom mohli přeformulovat takto: „Nechť $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x_0,y_0) = 0$. Jestliže existují čísla $\delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ a funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ tak, že platí

$$(11)\quad \forall (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \quad y = f(x) \iff \left(F(x,y) = 0 \wedge (x,y)^T \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\times(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)\right)$$

pak říkáme, že v okolí bodu $(x_0,y_0)^T$ je definována funkce f implicitně rovnicí (1)." Proveďte srovnání této alternativní definice s definicí 6. Výrok (11) se dá interpretovat takto: „Je dáno libovolné $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Pak rovnice

$$F(x,y)=0$$

o neznámé y má v intervalu $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ jediné řešení $y=f(x)$."

Stejným způsobem bychom mohli přeformulovat definici 14. Rovnost

$$\operatorname{graf} f = H_0(F) \cap U_\delta(x^{[0]}) \times (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$$

bychom mohli nahradit výrokem

$$\forall (x,y)^T \in \mathbb{R}^{N+1}: \big(F(x,y)=0 \wedge (x,y)^T \in U_\delta(x^{[0]}) \times (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)\big) \iff y=f(x)$$

a interpretovat ho takto: „Je dán bod $x=(x_1,\dots,x_N) \in U_\delta(x^{[0]})$. Pak rovnici

$$F(x_1,\dots,x_N,y)=0$$

o neznámé y má v intervalu $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ jediné řešení $y = f(x_1,\dots,x_N)$."

Nyní jsme připraveni na finální zobecnění. Uvažujme soustavu M rovnic

$$(12)\quad \begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_M)=0 \\ \vdots \\ F_M(x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_M)=0 \end{cases}$$

kde $F_j: \mathbb{R}^{N+M} \to \mathbb{R}$, kterou budeme řešit vzhledem k neznámým $y_1,\dots,y_N$. Řešením pak budou funkce $f_1,\dots,f_M: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tak, že

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1,\dots,x_N)\\ &\vdots\\ y_M &= f_M(x_1,\dots,x_N)\end{aligned}\right\} \iff (x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_M)^T \text{ splňuje } (12)$$

Z předchozího víme, že již pro $M = 1$ taková funkce f_A existovat nemusí (popř. není určena jednoznačně).
Opět zúžíme naši otázku existence jediného řešení soustavy (12) o neznámých $y_1,\dots,y_M$ a budeme se zabývat otázkou existence jediného řešení soustavy (12) „lokálně", tzn. v okolí nějakého bodu.
Použijeme vektorové značení – soustavu (12) pak můžeme zapsat jako

$$(13) \qquad F(x,y) = 0,$$

kde $x = (x_1,\dots,x_N)^T$, $y = (y_1,\dots,y_M)$, $0 = (0,\dots,0)^T$ a $F = (F_1,\dots,F_M)$. Místo rovnic

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1,\dots,x_N)\\ &\vdots\\ y_M &= f_M(x_1,\dots,x_N)\end{aligned}$$

budeme psát $y = f(x)$, kde $f = (f_1,\dots,f_M)^T$.

<u>Definice 21</u> Nechť $F : \mathbb{R}^{N+M} \to \mathbb{R}^M$, pro $(x^{[0]}, y^{[0]})^T \in \mathbb{R}^{N+M}$ platí $F(x^{[0]}, y^{[0]}) = 0$. Jestliže existují čísla $\delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ a (vektorová) funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ definovaná na $\mathcal{U}_\delta(x^{[0]})$ tak, že platí

$$\forall (x,y)^T \in \mathbb{R}^{N+M} : \left(y = f(x) \iff \left(F(x,y) = 0 \wedge (x,y)^T \in \mathcal{U}_\delta(x^{[0]}) \times \mathcal{U}_\varepsilon(y^{[0]}) \right)\right)$$

pak říkáme, že v okolí bodu $(x^{[0]}, y^{[0]})^T$ je definována (vektorová) funkce f implicitně rovnicí (1).

Zde jen zmíníme hlavní větu (opět bez důkazu) – – jde o zobecnění věty 11 a 16.

<u>Věta 22</u> (o vektorové funkci dané implicitně) Nechť $F: \mathbb{R}^{N+M} \to \mathbb{R}^M$ má na otevřené množině $D \subset \mathbb{R}^{N+M}$ spojité všechny parciální derivace až do řádu m (včetně), $(x^{[0]}, y^{[0]}) \in D$ je řešením rovnice (13), tj. $F(x^{[0]}, y^{[0]}) = 0$.
Jestliže platí

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x^{[0]}, y^{[0]})\right) \neq 0$$

pak je v okolí bodu $(x^{[0]}, y^{[0]})^T$ definována (vektorová) funkce f implicitně rovnicí (13). Toto zobrazení má ~~všechny~~ spojité všechny parciální derivace až do řádu m (včetně) a platí

$$\nabla f(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \quad \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

<u>Poznámka 23</u> Pro význam $\frac{\partial F}{\partial x}$ a $\frac{\partial F}{\partial y}$ viz poznámku 19; platí

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_M} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_M}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_M}{\partial y_M} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_M}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_M}{\partial x_N} \end{pmatrix}.$$

Na závěr uvedeme jeden z „důsledků" věty o implicitním zobrazení – větu o inverzním zobrazení.

<u>Věta 24</u> (o inverzním zobrazení) Nechť $G: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $x^{[0]} \in \operatorname{int}(\mathcal{D}(G))$. Jestliže má G spojité parciální derivace prvního (resp. až do m-tého) řádu na nějakém okolí bodu $x^{[0]}$ a platí

$$\det\left(\nabla G(x^{[0]})\right) \neq 0,$$

pak existuje okolí U bodu $x^{[0]}$ takové, že $G|_U$ je prosté zobrazení, $G(U)$ je otevřená množina, inverzní zobrazení $(G|_U)^{-1}$ má spojité parciální derivace prvního (resp. až do m-tého) řádu na $G(U)$ a platí

$$\nabla G^{-1}(G(x^{[0]})) = \left(\nabla G(x^{[0]})\right)^{-1}$$

(tzn. Jacobiho matice zobrazení $(G|_U)^{-1}$ v bodě $G(x^{[0]})$ je inverzní matice k ~~matici~~ Jacobiho matici zobrazení G v bodě $x^{[0]}$).

Důkaz provedeme speciálně pro $N=1$ – v tom případě se dá věta formulovat jednodušeji: „Nechť $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{int}(\mathcal{D}(G))$. Jestliže má G spojitou první derivaci na nějakém okolí bodu x_0 a platí

$$G'(x_0) \neq 0,$$

pak existuje okolí U bodu x_0 takové, že $G|_U$ je prostá funkce, $G(U)$ je otevřený interval, inverzní funkce $(G|_U)^{-1}$ má spojitou derivaci na $G(U)$ a platí

$$(G^{-1})'(G(x_0)) = \frac{1}{G(x_0)}\,.“$$

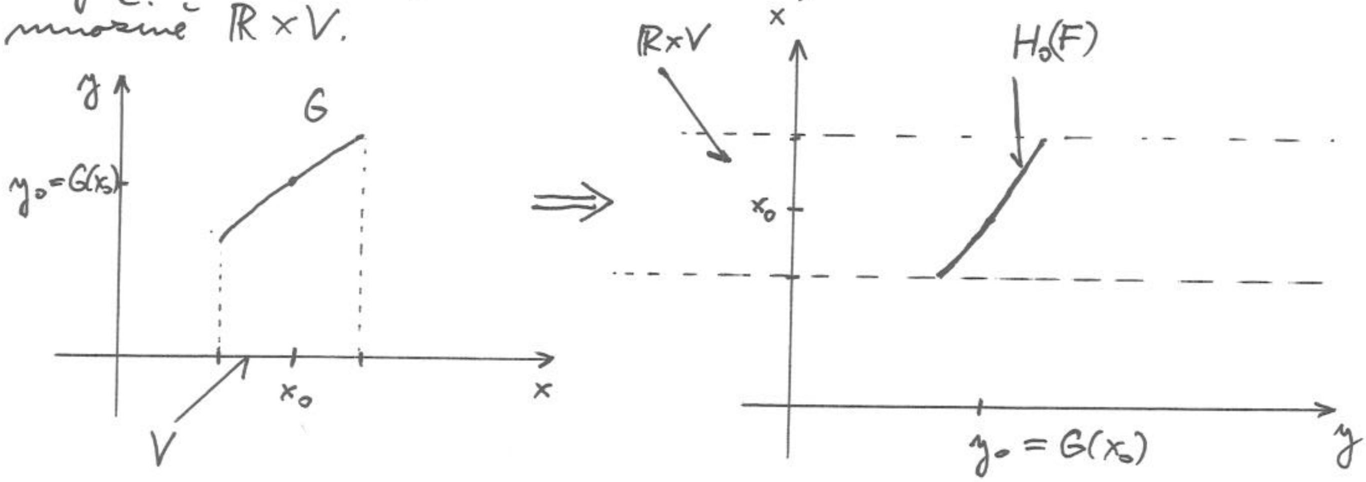
<u>Důkaz ($N=1$)</u> Uvažujme funkci $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definovanou na okolí V bodu x_0 a mající na něm spojitou derivaci. Definujme funkci dvou proměnných

$$F(y,x) = y - G(x) \qquad \forall (y,x)^T \in \mathbb{R}\times V.$$

Uvažujme bod $(y_0,x_0)^T = (G(x_0),x_0)^T$. Na funkci F a bod $(y_0,x_0)^T$ aplikujeme větu 11. Nejprve ověříme platnost předpokladů (všimněte si, že první proměnnou jsme označili jako y a druhou jako x). Platí

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 \;, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -G'(x) \quad \text{na } \mathbb{R}\times V,$$

tedy F má spojité parciální derivace prvního řádu na (otevřené) množině $\mathbb{R}\times V$.



Dále platí

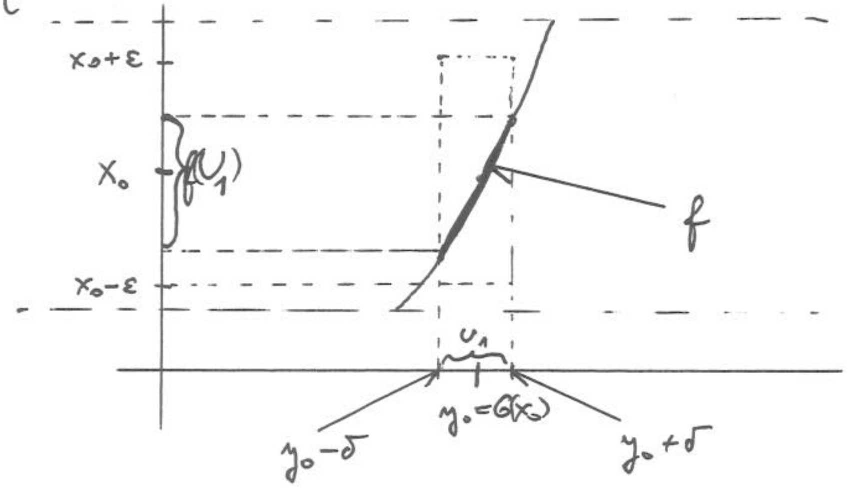
$$F(y_0, x_0) = y_0 - G(x_0) = G(x_0) - G(x_0) = 0$$

tzn. $(y_0, x_0) \in (\mathbb{R}\times V) \cap H_0(F)$. Nakonec

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = -G'(x_0) \neq 0 .$$

Z věty 11 plyne, že existují $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ a funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) = (G(x_0) - \delta, G(x_0) + \delta)$ taková, že

$$(14)\left\{\forall (y,x) \in \mathbb{R}\times V: \; x = f(y) \Longleftrightarrow \Big(y = G(x) \wedge (y,x) \in (G(x_0) - \delta, G(x_0 + \delta)) \times (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\Big),\right.$$



f má spojitou derivaci na $(G(x_0)-\delta, G(x_0)+\delta)$ a

$$f'(G(x_0)) = -\frac{1}{G'(x_0)} \neq 0 .$$

Z posledních dvou faktů plyne, že f' je kladná nebo záporná na nějakém okolí U_1 bodu $G(x_0)$. Pak f je na U_1 rostoucí nebo klesající, každopádně $f(U_1)$ je otevřený interval obsahující bod x_0 tedy i nějaké jeho okolí U (sami si už nakreslete v obrázku!), tedy $U \subset f(U_1)$.
Odtud a z (14) plyne

$$\forall (y,x) \in G(U)\times U : \quad y = G(x) \iff x = f(y)$$

neboli $f|_{G(U)}$ je inverzní k $G|_U$ (stručně: $f|_{G(U)} = (G|_U)^{-1}$).

$\square$