IMPLICITNÍ FUNKCE A ZOBRAZENÍ
INVERZNÍ ZOBRAZENÍ : PŘÍKLADY

① Nalezněte $y'(x)$ pro y zadanou implicitně rovnicí

(a) $x^3 + y^3 = 3$ $\qquad \left[\, y'(x) = -\frac{x^2}{y^2} \,\right]$

(b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ $\qquad \left[\, y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \,\right]$

(c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ $\qquad \left[\, y' = -\frac{y^2}{x^2} \,\right]$

(d) $\frac{x+y}{x-y} = 2$ $\qquad \left[\, y' = \frac{y}{x} \,\right]$

(e) $xy + x^2y^2 = 2$ $\qquad \left[\, y' = \boxed{\cancel{-\frac{y(1+2xy)}{x(1+2xy)}}} \; \cancel{y(1+2x} \; -\frac{y}{x} \,\right]$

(f) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = 4$ $\qquad \left[\, y' = \frac{y}{x} \,\right]$

(g) $\sin(xy) = 2$ $\qquad \left[\, y' = -\frac{y}{x} \,\right]$

② Nalezněte rovnici tečny ke křivce dané rovnicí

(a) $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ $\qquad$ v bodě $(1,1)^T$

$\left[\, t:\ y = -x + 2 \,\right]$

(b) $x^2 + x^3 = y + y^4$ $\qquad$ v bodě $(-1,0)^T$

$\left[\, t:\ y = x + 1 \,\right]$

(c) $x^4 + y^4 = 17$ $\qquad$ v bodě $(2,1)^T$

$\left[\, t:\ y = -8x + 17 \,\right]$

(d) $xy + y^2 - 3x - 3 = 0$ v bodě $(-1,1)^T$

$$\left[t: y = 2x + 3 \right]$$

③ Rozhodněte, zda křivka $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ leží v okolí bodu $(1,1)^T$ pod tečnou nebo nad tečnou (v tomto bodě).

[Leží POD tečnou.]

④ Najděte $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ v příslušném bodě pro funkci $z = z(x,y)$ danou implicitně rovnicí

(a) $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$ v bodě $(1,1,1)^T$

$$\left[z_x = \frac{1}{4}, \quad z_y = -\frac{3}{4} \right]$$

(b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0$ v bodě $(2,3,6)^T$

$$\left[z_x = -9, \quad z_y = -4 \right]$$

(c) $\sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z) = 0$ v bodě $(\pi,\pi,\pi)^T$

$$\left[z_x = -1, \quad z_y = -1 \right]$$

(d) $xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - 3\ln 2 = 0$ v bodě $(1, \ln 2, \ln 3)^T$

$$\left[z_x = -\frac{4}{3\ln 2}, \quad z_y = -\frac{5}{3\ln 2} \right]$$

(5) (a) Určete rovnici tečné roviny v bodě $(1,0,1)^T$ k ploše určené rovnicí

$$x^3+y^3+z^3-3xyz-x-y-z=0$$

$$\left[\ \tau:\ x-2y+z-2=0\ \right]$$

(b) Rozhodněte, zda plocha daná rovnicí

$$x+y^2+z^3+z-4=0$$

leží v okolí bodu $(1,1,1)^T$ pod tečnou rovinou nebo nad tečnou rovinou sestrojenou v tomto bodě.

[Leží POD tečnou rovinou.]

(c) Určete lokální extrémy funkce $z=f(x,y)$ určené implicitně rovnicí

$$x^2+y^2+z^2-xz-\sqrt{2}\,yz=1.$$

$$\left[\ z_{max}=2 \text{ v bodě } (1,\sqrt{2})^T;\ z_{min}=-2 \text{ v bodě } (-1,-\sqrt{2})^T\ \right]$$

Příklady (5) jsou řešené v [Došlá] na stranách 100, 101.

(6) Najděte stacionární body funkce $z=f(x,y)$ dané implicitně a zjistěte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy

(a) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$

$$\left[\ z_{max}=6 \text{ v } (1,-1)^T;\ z_{min}=-2 \text{ v } (1,-1)\ \right]$$

(b) $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$

$$\left[\ z_{max}=-1 \text{ v } (2,0)^T;\ z_{min}=\tfrac{8}{7} \text{ v } \left(-\tfrac{16}{7},0\right)^T\ \right]$$

(7) Rozhodněte, zda zobrazení $G=(G_1,G_2)^T$ je prosté v okolí bodu (x_0,y_0). Pokud ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $(u_0,v_0)^T=G(x_0,y_0)$.

(a) $G_1(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $G_2(x,y)=xy$, $(x_0,y_0)^T=(0,1)^T$

$$\left[\ \nabla G^{-1}(u_0,v_0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]$$

(b) $G_1(x,y)=x^3-3xy^2$, $G_2(x,y)=y^3+3x^2y$, $(x_0,y_0)^T=(1,1)^T$

$$\left[\ \nabla G^{-1}(u_0,v_0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & 0\end{pmatrix}\right]$$

(c) $G_1(x,y)=x^y$, $G_2(x,y)=y^x$, $(x_0,y_0)^T=(1,1)^T$.

$$\left[\ \nabla G^{-1}(u_0,v_0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]$$