Matematická analýza KMA/MA2I
3. přednáška
Primitivní funkce

1 Definice a základní vlastnosti

Příklad 1 Uvažujme následující úlohu: „Najděte funkci $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že

$$F'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}.\text{“}$$

Kdo zná vzorce pro výpočet derivací elementárních funkcí snadno uhodne, že řešením by mohla být funkce

$$F(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A to proto, že $(x^2)' = 2x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Není to ale jediná taková funkce. Snadno se lze přesvědčit o tom, že řešeními jsou i funkce

$$F_1(x) = x^2 + 2,\ F_2(x) = x^2 - 1,\ \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

tedy všechny funkce ve tvaru

$$F(x) = x^2 + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde C je libovolné reálné číslo.

Zformulujeme tuto úlohu obecněji: „Je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a interval $J \subset \mathcal{D}(f)$. Najděte funkci (a pokud to je možné tak všechny funkce) F takovou, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in J.\text{“}$$

Jak jsme viděli v předchozím příkladu, řešení této úlohy nemusí být jediné. Dokonce tato úloha nemusí mít řešení žádné.

Jak jste si možná všimli, hledání funkce F je opačný proces k derivování - totiž, máme „uhodnout“ funkci (funkci F) jejíž derivací je zadaná funkce (funkce f). Řešení F této úlohy budeme říkat primitivní funkce (v anglicky psané literatuře se občas objevuje název „antiderivative“ - česky „antiderivace“, který je možná výstižnější).

Definice 2 Je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a interval $J \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí k funkci f na intervalu J*, jestliže

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in J$$

(v krajních bodech intervalu J, které do něj patří se rozumí výrazem $F'(x)$ příslušná jednostranná derivace funkce F v bodě x). Označujeme $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ (funkci f pak říkáme *integrand*). Procesu hledání primitivní funkce říkáme *integrování*, nebo *integrace*.

Okamžitě z definice plyne následující tvrzení.

Věta 3 *Primitivní funkce je spojitá.*

Věta 4 *Je–li F primitivní funkce k funkci f na intervalu $J \subset \mathbb{R}$, pak je F primitivní funkcí k funkci f i na každém podintervalu intervalu J.*

2 Existence a jednoznačnost primitivní funkce

Než přikročíme k popisu metod hledání primitivních funkcí, je třeba si vyjasnit otázku existence a jednoznačnosti primitivních funkcí.

Nejprve odpovíme na otázku existence.

Věta 5 *Je–li funkce spojitá na intervalu, pak k ní existuje primitivní funkce (na tomto intervalu).*

Důkaz provedeme později.

Teď k jednoznačnosti primitivní funkce. V prvním příkladu jsme viděli, že k funkci $f(x) = 2x,\ x \in \mathbb{R}$, existuje nekonečné množství primitivních funkcí, a to ve tvaru $x^2 + C,\ x \in \mathbb{R}$, kde $C \in \mathbb{R}$.

Přirozeně vyvstává otázka: „Existují k této funkci ještě nějaké další primitivní funkce?“ Na tuto otázku naštěstí odpovíme záporně.

Věta 6 *Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, interval $J \subset \mathcal{D}(f)$. Množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu J je buď prázdná, nebo ve tvaru*

$$\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\},$$

kde F je nějaká primitivní funkce k f na J.

Poznámka 7 *Věta 6 tedy říká, že funkce buď na daném intervalu nema žádnou primitivní funkci, nebo stačí nalézt jednu a všechny ostatní lze získat přičtením libovolné konstanty k této funkci.*

K důkazu věty 6 budeme potřebovat dvě pomocná tvrzení.

Lemma 8 *Nechť pro funkci* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a interval* $J \subset \mathcal{D}(f)$ *platí*

$$F'(x) = 0 \quad \forall x \in J.$$

Pak F *je konstantní na intervalu* J.

Důkaz. Provedeme jej sporem. Předpokládejme, že F není konstantní, tzn. existují x_1, $x_2 \in J$, $x_1 < x_2$ tak, že

$$F(x_1) \neq F(x_2)$$

Z předpokladu existence nulové derivace (takže vlastní derivace) plyne, že F je spojitá na J , tedy i na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$. Zřejmě jsou splněny předpoklady Lagrangeovy věty. Podle ní existuje $\xi \in (x_1, x_2)$ tak, že

$$F'(\xi) = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$$

To je spor, protože levá strana je rovna nule a pravá je nenulová (protože předpokládáme $F(x_1) \neq F(x_2)$). $\square$

Poznámka 9 *Předpoklad, že* J *je interval, je podstatný. Zkuste ukázat, že bez něho by tvrzení lemmatu již neplatilo.*

Lemma 10 *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathcal{D}(f)$ *je interval.*
(a) Je–li F *primitivní funkce k funkci* f *na intervalu* J, *pak pro každé* $C \in \mathbb{R}$ *je funkce*

$$F(x) + C, \;\; x \in J$$

také primitivní funkce k funkci f *na intervalu* J.
(b) Jsou–li F_1, F_2 *primitivní funkce k funkci* f *na intervalu* J, *pak funkce*

$$F_2 - F_1$$

je konstatní na J, *tzn. existuje* $C \in \mathbb{R}$ *tak, že*

$$F_2(x) = F_1(x) + C, \quad \forall x \in J.$$

Důkaz. (a) Platí

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x), \quad \forall x \in J,$$

tedy $F(x) + C$, $x \in J$ je pritimitivní k f na J.
(b) Platí

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in J,$$

což (z lemmatu 8) znamená, že funkce $F_1 - F_2$ je konstantní na J. $\square$

Nyní můžeme přistoupit k důkazu věty 6.

Důkaz. Označme symbolem $\mathcal{F}$ množinu všech primitivních funkcí k funkci f na J. Zřejmě je buď $\mathcal{F} = \emptyset$ nebo $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Pokud $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pak existuje $F \in \mathcal{F}$. Z lemmatu 10(a) plyne, že

$$\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{F}.$$

Dokážeme opačnou inkluzi (a tedy celkově dokážeme rovnost těchto množin). Nechť $\tilde{F} \in \mathcal{F}$. Podle lemmatu 10(b) je $\tilde{F} - F$ konstantní, tzn. existuje $C \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\tilde{F}(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in J.$$

To ale znamená, že $\tilde{F} \in \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$. Tím je opačná inkluze dokázána. Dohromady tedy dostáváme $\mathcal{F} = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$. □

Poznámka 11 Primitivní funkci k funkci f značíme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vždy je třeba mít na paměti, že tím rozumíme **jednu z** primitivních funkcí k funkci f (na daném intervalu). Jak už jsme se dozvěděli (z lemmatu 10(b)), každé dvě primitivní funkce k téže funkci „se liší o aditivní konstantu“.

Poznámka 12 *Vzhledem k poznámce 11, větě 6 a příkladu 1 můžeme psát*

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $C \in \mathbb{R}$.

3 Primitivní funkce elementárních funkcí

Nyní si odvodíme vzorce pro výpočet primitivních funkcí některých elementárních funkcí.

Příklad 13 Nalezněte všechny primitivní funkce k nulové funkci na intervalu $\mathbb{R}$.
Řešení. Víme, že

$$(0)' = 0.$$

Z věty 6 plyne

$$\int 0\,\mathrm{d}x = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 14 Nalezněte všechny primitivní funkce k funkci

$$1, \quad x \in \mathbb{R}$$

na $\mathbb{R}$.

Řešení. Z tabulky derivací elementárních funkcí snadno zjistíme

$$(x)' = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proto podle věty 6 dostáváme

$$\int 1 \, \mathrm{d}x = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 15 Nalezněte všechny primitivní funkce k funkci

$$x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

na $\mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$.
Řešení. Provedeme nejprve pro $n = 1$. Máme tedy najít alespoň jednu funkci F pro kterou platí

$$F'(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Z tabulky derivací elementárních funkcí snadno zjistíme, že

$$(x^2)' = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

To ale ještě není přesně to, co hledáme. Asi už sami uhádnete, že stačí předpis funkce x^2 trochu změnit a dostáváme

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proto podle věty 6 dostáváme

$$\int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Podobně pozorujeme, že

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

takže inspirování předchozím případem snadno uhádneme, že

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Podle věty 6 tedy platí

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 16 Nalezněte všechny primitivní funkce k funkci

$$x^\alpha, \quad x \in (0, \infty)$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.
Řešení. Inspirováni příkladem 15 snadno uhádneme, že

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha},$$

pro každé $x > 0$ (rozmyslete si pro která x ještě tato identita platí vzhledem k parametru α, např pro $\alpha = 1/3$ platí pro každé $x \neq 0$).
Je–li $\alpha + 1 \neq 0$ (tj. $\alpha \neq -1$) můžeme psát

$$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

na každém intervalu, který je podmnožinou definičního oboru funkce x^{α}.
Podívejme se na případ $\alpha + 1 = 0$ (tj. $\alpha = -1$). Tzn. máme najít primitivní funkci k funkci $1/x$. Jelikož její definiční obor není interval, musíme hledat primitivní funkci k této funkci zvlášť na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, \infty)$. Opět pohled do tabulky derivací elementárních funkcí nám dává jasnou odpověď, a to

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

Tedy podle věty 6 máme

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

na intervalu $(0, \infty)$.
Teď se podíváme na primitivní funkci na intervalu $(-\infty, 0)$. Platí

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, 0),$$

tedy podle věty 6 máme

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

na intervalu $(-\infty, 0)$.

Dohromady píšeme

$$\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Toto čteme a chápeme takto: Funkce s předpisem $\ln|x| + C$ je primitivní k funkci x^{-1} na každém intervalu, který je podmnožinou množiny $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 17 *Nalezněte všechny primitivní funkce k funkci*

$$a^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $a > 0$ a $a \neq 1$.
Řešení. Z tabulky derivací elementárních funkcí snadno zjistíme, že

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Protože $\ln a$ je nenulová konstanta, pak

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Odtud a z věty 6 plyne, že

$$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 18 *Nalezněte všechny primitivní funkce k funkci*

$$\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Opět z tabulky derivací elementárních funkcí snadno zjistíme, že

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Odtud

$$(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

tedy podle věty 6 platí

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 19 Nalezněte všechny primitivní funkce k funkci

$$\cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Z tabulky derivací elementárních funkcí snadno vidíme, že

$$(\sin x)' = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Podle věty 6 tedy dostáváme

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Naš výsledky shrneme do tabulky:

$$
\begin{aligned}
&\int 0 \,\mathrm{d}x = C, \int 1 \,\mathrm{d}x = x + C \\
&\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \text{pro } \alpha \neq 1, \\
&\int x^{-1} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C, \\
&\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{pro } a > 0,\ a \neq 1, \\
&\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C, \\
&\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C,
\end{aligned}
$$

a z tabulky derivací elem. funkcí přímo dostáváme:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C, \\
&\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C, \\
&\int \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C, \\
&\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

kde $C \in \mathbb{R}$.

4 Základní metody výpočtu

Podobně jako u počítání derivací si ani zde nevystačíme pouze s tabulkou vzorců pro elementární funkce. Pokuste se určit primitivní funkce třeba k funkcím

$$x + 1, x \sin x, e^{2x}, \ln x, \dots$$

Zjistíte, že přestože nevypadají příliš složitě, je to už problém. Potřebovali bychom vzorce pro výpočet prim. funkce součtu, součinu apod. Jak uvidíme, narozdíl od derivování, nabídka nebude tak velká. Následkem toho je fakt, že hledání primitivní funkce je narozdíl od derivování o několik řádů složitější problém. Dokonce k některým jednoduchým funkcím se nám ani nepodaří nalézt funkční předpis primitivní funkce. Např. funkce

$$e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

má podle věty 5 primitivní funkci na $\mathbb{R}$, přitom se ještě nikomu nepodařilo najít její funkční předpis. Nejde tu o nějaký uměle vykonstruovaný příklad. Funkce $\int e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$ je jednou z nejdůležitějších funkcí ve statistice.

Věta 20 *Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkcím f a g na intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Pak funkce $F \pm G$ je primitivní funkce k funkci $f \pm g$ na intervalu J, tzn.*

$$\int f(x) \pm g(x) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x \pm \int g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Platí

$$(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x), \quad \forall x \in J.$$

□

Následuje věta o primitivní funkci součinu konstanty a funkce.

Věta 21 *Nechť funkce F je primitivní funkce k f na intervalu J, $c \in \mathbb{R}$ Pak funkce cF je primitivní k funkci cf na intervalu J, tzn.*

$$\int cf(x) \, \mathrm{d}x = c \int f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Platí

$$(cF(x))' = cF'(x) = cf(x), \quad \forall x \in J.$$

□

Příklad 22 Vypočtěte

$$\int x^2 + 2x - 5 \, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Z věty 20 plyne

$$\int x^2 + 2x - 5 \, \mathrm{d}x = \int x^2 \, \mathrm{d}x + \int 2x \, \mathrm{d}x - \int 5 \, \mathrm{d}x.$$

Z věty 21 plyne, že

$$\int 2x = 2 \int x \, \mathrm{d}x, \quad \int 5 \, \mathrm{d}x = 5 \int 1 \, \mathrm{d}x.$$

Z tabulky primitivních funkcí dostáváme

$$\int x^2 + 2x - 5 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 5x.$$

To je ale jen jedna primitivní funkce. Z věty 6 víme, že všechny primitivní funkce k funkci $x^2 + 2x - 5$ na $\mathbb{R}$ jsou ve tvaru

$$\frac{x^3}{3} + x^2 - 5x + C$$

kde $C \in \mathbb{R}$.

Příklad 23 Vypočtěte

$$\int (3\cos x - \frac{x^2}{5} - 1)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned}\int (3\cos x - \frac{x^2}{5} - 1)\,\mathrm{d}x &= 3\int \cos x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{5}\int x^2\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x \\ &= 3\sin x - \frac{1}{5}\frac{x^3}{3} - x + C = 3\sin x - \frac{x^3}{15} - x + C.\end{aligned}$$

Nyní se podívejme na primitivní funkci součinu. Zde již neplatí pěkný vzoreček jako u derivací. Jediné co můžeme říci je věta „o integraci per partes" - česky: „o integraci po částech". Název plyne z toho, že věta nám nedává výsledek, ale pouze nám umožní převést hledání primitivní funkce součinu funkcí na hledání primitivní funkce **jiného** součinu funkcí. Záleží pak na našich schopnostech a zkušenostech, aby nám věta byla k něčemu platná

Věta 24 *(integrace per partes) Nechť funkce u a v mají derivace u' a v' na intervalu J. Nechť F je primitivní funkce k funkci $u'v$. Pak funkce $G = uv - F$ je primitivní k uv', tzn.*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nechť $F' = u'v$ na J. Pak

$$G' = (uv - F)' = u'v + uv' - F' = u'v + uv' - u'v = uv'$$

na J. Tedy G je primitivní k uv' na J. □

Poznámka 25 Všimněte si, že důkaz věty o primitivní funkci součtu byl založen na použití věty o derivaci součtu, důkaz věty o součinu konstanty a funkce byl založen na použití věty o derivaci součinu konstanty a funkce a konečně, důkaz věty o integraci per partes byl založen na použití věty o derivaci součinu.

Poznámka 26 Věta 24 se používá pro výpočet primitivní funkce k funkci uv'. Přitom se výpočet pomocí této věty pouze převede na výpočet primitivní funkce k funkci $u'v$. Je tedy jasné, že naším cílem je, abychom si s

$$\int u'v\,\mathrm{d}x$$

již uměli poradit. Jak uvidíte na příkladech, zásadní důležitost bude mít volba funkcí u a v.

Příklad 27 Vypočtěte

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Funkci $x \sin x$ v tabulce primitivních funkcí nenajdeme, musíme na to jít jinak. Vzhledem k tomu, že máme vypočítat primitivní funkci k funkci ve tvaru součinu, můžeme použít větu 24. Nejprve je nutné zvolit vhodně funkce u a v. Vezmeme–li

$$u(x) = x,\ v'(x) = \sin x,$$

pak

$$u'(x) = 1,\ v(x) = \int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x.$$

Z věty 24 tedy plyne

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, \mathrm{d}x &= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, \mathrm{d}x = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Všimněte si, že pomocí věty 24 jsme převedli problém zintegrování funkce $x \sin x$ na problém zintegrování funkce $\cos x$, což už pro nás není problém. Nebyla to náhoda, ale právě vhodná volba funkcí u a v. Kdybychom je zvolili nevhodně, tzn. kdybychom položili například

$$u(x) = \sin x, \quad v'(x) = x,$$

pak

$$u'(x) = \cos x, \quad v(x) = \frac{x^2}{2}$$

a z věty 24 bychom dostali

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x \, \mathrm{d}x.$$

Vidíme, že situace se spíše zkomplikovala než zjednodušila. Proto je tak důležité si před použitím této věty rozmyslet (v hlavě si jednu funkci zderivovat a druhou zintegrovat), jak zvolit u a v. Výpočet bývá zapisován takto

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, \mathrm{d}x &= \left[\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] \\ &= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, \mathrm{d}x = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Příklad 28 Vypočtěte:

$$\int x e^x \, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right] = x e^x - \int e^x \, \mathrm{d}x = x e^x - e^x + C.$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\int x \cos \,\mathrm{d}x \\ &= \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x) \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2\int \sin x \,\mathrm{d}x \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.\end{aligned}$$

Příklad 29 Vypočtěte

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x$$

na $(0, \infty)$.

Řešení. Funkci $\ln x$ v naší tabulce primitivních funkcí nemáme. Musíme si poradit jinak. Použijeme k výpočtu trik, který lze s úspěchem aplikovat i na výpočet

$$\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x, \int \arcsin x \,\mathrm{d}x, \dots$$

Stačí si uvědomit, že $\ln x = 1 \cdot \ln x$. Platí

$$\begin{aligned}\int \ln x \,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{bmatrix} = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \,\mathrm{d}x \\ &= x \ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x = x \ln x - x + C.\end{aligned}$$

Nyní se podíváme na věty o substituci.

Nejprve zkuste uhádnout funkční předpis funkce $\int e^{-x} \,\mathrm{d}x$. Po chvíli zkoušení vás asi napadne, že

$$(-e^{-x})' = e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

tedy $\int e^{-x} \,\mathrm{d}x = -e^{-x} + C$, $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.
Podobně platí $\int \sin 2x \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{2} + C$, $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$, protože

$$\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)' = -\frac{-\sin 2x \cdot 2}{2} = \sin 2x.$$

Všimněte si, že při ověřování jsme využili větu o derivaci složené funkce. Důkazy následujících vět o substituci budou založeny zejména na použití této věty.

Věta 30 *(první věta o substituci) Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu J. Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ derivaci φ' a*

$$\varphi(I) \subset J.$$

Pak $F \circ \varphi$ je primitivní k funkci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na I, tzn.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)).$$

pro $t \in I$.

Poznámka 31 Tvrzení je možno formulovat bez funkce F takto

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x|_{x=\varphi(t)},$$

kde $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ je vlastně funkce $F(x)$ a $\int f(x)\,\mathrm{d}x|_{x=\varphi(t)}$ je funkční hodnota funkce F v bodě $\varphi(t)$, tedy $F(\varphi(t))$. Tento druhý zápis je možná vhodnější pro vysvětlení významu první věty o substituci: Chceme určit primitivní funkci k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ (na intervalu I). Věta nám umožní převést tento problém na nalezení primitivní funkce k funkci f (na intervalu J) – přitom použití bude smysluplné pouze v případě, že se výpočet zjednoduší.

Nyní přikročíme k důkazu věty 30.

Důkaz. Máme dokázat, že $F \circ \varphi$ je primitivní k $(f \circ \varphi)\varphi'$ na I. S použitím věty o derivaci složené funkce dostáváme

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \quad \forall t \in I.$$

□

Poznámka 32 Prakticky používáme větu tak, že při výpočtu primitivní funkce

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

provedeme „substituci“ (nahrazení) integrační proměnné x proměnnou t pomocí

$$x = \varphi(t).$$

Podle věty 30 pak můžeme psát

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Navenek to vypadá, jako bychom v prvním výrazu změnili $\varphi(t)$ za x a $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ za $\mathrm{d}x$ (budeme to takto i zapisovat – je to ale jen taková pomůcka pro lepší zapamatování). Následně se určí funkční předpis $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a dosadí se $\varphi(t)$ za x – viz příklady.

Příklad 33 Určete

$$\int \cos 3t\,\mathrm{d}t.$$

Řešení. Pomocí věty o substituci vypočítáme

$$\int \cos 3t \,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} x = 3t \\ \mathrm{d}x = 3\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \cos x \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \cos x \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3} \sin x + C = \frac{1}{3} \sin 3t + C.$$

Komentář: Měli jsme tedy určit primitivní funkci k funkci $\cos 3t$. Tato funkce ovšem není v tabulce primitivních funkcí a ani nešlo použít metody integrace „per partes." Ale k funkci $\cos x$ již primitivní funkci známe. Substituční metoda nám převedla úlohu určit $\int \cos 3t \,\mathrm{d}t$ na určení $\int \cos x \,\mathrm{d}x$.

Poznámka 34 Pomocí věty o substituci lze vypočítat například

$$\int x e^{x^2} \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} y = x^2 \\ \mathrm{d}y = 2x \,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \int e^y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} e^y + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Ale třeba primitivní funkci

$$\int e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$$

bychom již pomocí této věty neurčili (v integrandu chybí x – které se objevuje ve výrazu $x \,\mathrm{d}x$).

Příklad 35

$$\int \cos^3 t \,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t \cos t \,\mathrm{d}t = \int (1 - \sin^2 t) \cos t \,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = \sin t \\ \mathrm{d}u = \cos t \,\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$
$$= \int (1 - u^2) \,\mathrm{d}u = u - \frac{u^3}{3} + C = \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} + C.$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 4} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{x^2}{4} + 1} = \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{(\frac{x}{2})^2 + 1} = \begin{bmatrix} u = \frac{x}{2} \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \int \frac{2 \,\mathrm{d}u}{u^2 + 1}$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

Věta 36 *(druhá věta o substituci) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována na intervalu $J \subset \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má na intervalu I derivaci φ', která je na I buď kladná nebo záporná a*

$$\varphi(I) = J.$$

Je–li G primitivní k $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na I, pak $G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní k f na J, tzn.

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)).$$

Poznámka 37 Tvrzení je možno formulovat bez funkce G takto

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

A právě takto ji budeme používat. Věta 36 nám tedy převede úlohu nalezení primitivní funkce k funkci f na úlohu nalezení primitivní funkce k funkci $(f \circ \varphi)\varphi'$. Je asi jasné, že funkci φ lze volit téměř libovolně (musí mít na intervalu I kladnou nebo zápornou derivaci a $\varphi(I) = J$), ale samozřejmě hlavně tak, aby výpočet vzniklého

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

byl jednodušší než $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz. Nejprve provedeme pomocné úvahy. Z předpokladu, že φ' je buď kladná nebo záporná na I plyne, že φ je rostoucí nebo klesající na I. V obou případech je ryze monotonní, existuje tedy inverzní funkce $\varphi^{-1} : J \to I$ a

$$(\varphi^{-1}(x))' = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}, \quad \forall x \in J.$$

Nyní přistupme k hlavní části důkazu. Nechť G je primitivní funkce k funkci $(f \circ \varphi)\varphi'$ na intervalu I, tzn.

$$G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad \forall t \in I.$$

Máme dokázat, že $G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní k funkci f na I, tzn.

$$(G \circ \varphi^{-1})'(x) = f(x), \quad \forall x \in J.$$

S využitím výše uvedených vztahů platí

$$\begin{aligned}(G \circ \varphi^{-1})'(x) &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x)\\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x), \quad x \in J.\end{aligned}$$

□

Poznámka 38 Rozdíl mezi použitím vět o substituci je následující. V první větě jsme již „substituční funkci“ φ měli dánu ze zadání úlohy, ale mohli jsme substituovat téměř bezmyšlenkovitě. V druhé větě si můžeme funkci φ vymyslet téměř libovolně – musíme ale ověřit, že φ' je kladná nebo záporná a $\varphi(I) = J$.

Příklad 39 Určete

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Zadání je tedy ve tvaru $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. V souladu se značením použitém ve větě 36 by pak $J = (-1, 1)$ (sice $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1 \rangle$, ale body

$x = 1$, $x = -1$ nás nebudou zajímat – pro zdůvodnění viz dále) Naším úkolem teď bude najít vhodnou funkci $\varphi : I \to (-1, 1)$ takovou, že $\varphi' < 0$ nebo $\varphi' > 0$ na I, $\varphi(I) = (-1, 1)$ a hlavně takovou, aby primitivní funkce $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ šla určit.

U tohoto příkladu je vhodné zvolit

$$\varphi(t) = \sin t, \quad t \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

(nakreslete si její graf!!! – zvýrazněte si v obrázku intervaly I a J). Tato funkce splňuje předpoklady věty 36, protože

$$\varphi'(t) = \cos t > 0, \quad \forall t \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

a

$$\varphi(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)) = (-1, 1)$$

(zde je vidět, že kdybychom hledali primitivní funkci k $\sqrt{1 - x^2}$ na celém intervalu $\langle -1, 1\rangle$, museli bychom vzít $I = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, což by nešlo, protože $\varphi'(\pm\pi/2) = 0$).

Nyní můžeme přistoupit k samotnému výpočtu. Platí

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \text{2. v. o s.} \\ x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x \end{array} \right| = \int \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int |\cos t| \cos t\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{l} t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \Rightarrow \cos t > 0 \\ \Rightarrow |\cos t| = \cos t \end{array} \right| = \int \cos t \cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2}) + C = \left| \begin{array}{l} \text{dosadíme } t = \varphi^{-1}(x) \\ \text{tzn. } t = \arcsin(x) \end{array} \right| =$$

$$\frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + C$$

Mohli bychom být s výsledkem spokojeni. Pro úplnost ho upravíme do hezčího tvaru. Platí totiž vzorec

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = \left| \begin{array}{l} t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \Rightarrow \cos t > 0 \end{array} \right| = 2\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t},$$

tedy

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

Celkově můžeme napsat

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

5 Integrace racionálních funkcí

Racionální funkcí rozumíme funkci ve tvaru

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P, Q jsou polynomy. V této kapitole se budeme bavit problémem jak určit

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x.$$

To provedeme v několika krocích.

(A) Nejprve určíme primitivní funkce některých jednoduchých typů racionálních funkcí.

(I) Zřejmě

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

(II) Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$. Pak

$$\int \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x = \int x^{-k}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{1-k}}{1-k} + C = \frac{1}{(1-k)x^{k-1}} + C.$$

(III) Platí

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = x^2+1 \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} \stackrel{(I)}{=} \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

(IV) Podle vzorce víme, že

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C.$$

(V) Nechť A, $B \in \mathbb{R}$. Pak

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + B\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1},$$

což jsou případy (III) a (IV).
(VI) Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$. Pak

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^k}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = x^2+1 \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^k},$$

což je zase případ (II).
(VII) Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$. Označíme

$$I_k = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^k}.$$

Pak

$$\begin{aligned}
I_k &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^k}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{k-1}} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^k}\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{(x^2+1)^k}, & v \overset{(VI)}{=} \frac{1}{2(1-k)(x^2+1)^{1-k}} \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{k-1}} - \frac{x}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{k-1}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2(1-k)}\right) I_{k-1} - \frac{x}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}}.
\end{aligned}$$

(VIII) Nechť A, $B \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+1)^k}\,\mathrm{d}x = A \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^k} + B \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^k} = \dots$$

což vede opět na případy (III) až (VII).

(B) Nyní se podíváme na hledání racionální funkce v plné obecnosti. Nechť je dána racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Rozlišíme dva případy:
(1) $\deg P \geq \deg Q$,
(2) $\deg P < \deg Q$.
ad (1) V tomto případě lze podělit (se zbytkem) polynom P polynomem Q a dostaneme dva polynomy P_1 a P_2 takové, že

$$R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)},$$

přičemž $\deg P_2 < \deg Q$. Protože polynom P_1 snadno zintegrujeme, převedli jsme tento problém na případ (2) – viz dále.
ad (2) Z algebry máme k dispozici následující větu.

Věta 40 *Nechť $R(x) = P(x)/Q(x)$ je racionální funkce taková, že $\deg P < \deg Q$ a*

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-a_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^{l_j}$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, \dots, r$, α_j, $\beta_j \in \mathbb{R}$ pro $j = 1, \dots, s$, přičemž polynomy $x^2 + \alpha_j x + \beta_j$ nemají reálné kořeny pro každé $j = 1, \dots, s$. Pak existují čísla

A_{ij} pro $j = 1, \dots, r$, $i = 1, \dots, k_j$, C_{ij}, D_{ij} pro $j = 1, \dots, s$, $i = 1, \dots, l_i$ tak, že

$$R(x) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=1}^{k_j} \frac{A_{mj}}{(x - a_j)^m} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{m=1}^{l_j} \frac{C_{mj}x + D_{mj}}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^m}$$

(tomuto rozkladu se říká rozklad na parciální zlomky).

Poznámka 41 Přesné znění této věty nebude třeba si pamatovat. Říká zhruba toto: „Každou racionální funkce $P(x)/Q(x)$, kde $\deg P < \deg Q$ lze napsat jako lineární kombinaci racionálních funkcí ve tvaru

$$\frac{1}{(x - a_j)^m}, \quad \frac{Cx + D}{(x^2 + \alpha_i x + \beta_i)^m}.\text{“}$$

Což jsou (ne náhodou) typy funkcí, jejichž primitivní funkce jsme určovali v části (A) – typy (I) až (VIII).

Z této věty tedy plyne, že jakmile určíme konstanty A_{ij}, B_{ij} a C_{ij}, pak

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=1}^{k_j} \int \frac{A_{mj}}{(x - a_j)^m}\,\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{s} \sum_{m=1}^{l_j} \int \frac{C_{mj}x + D_{mj}}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^m}\,\mathrm{d}x.$$

Budeme tedy integrovat dva typy výrazů. Nejprve integrály

$$\int \frac{A_{mj}}{(x - a_j)^m}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = x - a_j \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{array}\right] = \int \frac{A_{mj}}{u^m}\,\mathrm{d}u = \dots$$

které vedou na speciální případy (I), (II).

Integrály

$$\int \frac{C_{mj}x + D_{mj}}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^m}\,\mathrm{d}x$$

si nejprve musíme trochu upravit a pak dostáváme jeden z případů (III) – (VII). Obecné odvození je poněkud složitější na zápis, proto si spíše uvedeme příklad takové úpravy.

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve si upravíme jmenovatel. Platí

$$x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 5 = (x + 1)^2 + 4 = 4\left[\left(\frac{x + 1}{2}\right)^2 + 1\right].$$

Můžeme tedy počítat

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x+1}{4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u=\frac{x+1}{2} \\ \mathrm{d}u=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x \end{array}\right] \\ &= \int \frac{2u}{4(u^2+1)}2\,\mathrm{d}u = \int \frac{u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \overset{\text{(VIII)}}{=} \frac{1}{2}\ln(u^2+1)+C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)+C = \ldots = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+C.\end{aligned}$$

Nyní si ukážeme příklad, který se může objevit na zkouškové písemce.

Příklad 42 Vypočtěte

$$I = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$$

Řešení. Jeho řešení se skládá ze dvou částí

1. rozklad na parciální zlomky,
2. výpočet integrálů – speciální případy (I)–(VIII).

Ad 1. Z předchozího tedy plyne, že existují konstanty A, B, C, $D \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Musíme tyto konstanty nějakým způsobem určit. Třeba tak, že celou rovnost vynásobíme jmenovatelem zlomku nalevo a dostáváme

$$x = A(x-1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

Roznásobíme výrazy nalevo

$$x = A(x-1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x-1)^2,$$

ještě roznásobíme

$$x = A(x^3+x^2-2) + B(x^2+2x+2) + (Cx^3+Dx^2-2Cx^2-2Dx+Cx+D),$$

vytkneme členy x^i

$$x = (A+C)x^3 + (A+B-2C+D)x^2 + (2B+C-2D)x - 2A + 2B + D$$

a porovnáme koeficienty polynomů na obou stranách. Dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A+C &= 0, \\ A+B-2C+D &= 0, \\ 2B+C-2D &= 1, \\ -2A+2B+D &= 0. \end{aligned}$$

Řešení dostáváme $A = \frac{1}{25}$, $B = \frac{1}{5}$, $C = -\frac{1}{25}$, $D = -\frac{8}{25}$. Pak

$$I = \int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{1}{25}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{25}\int \frac{x+8}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x.$$

Ad 2. Vypočítáme jednotlivé integrály – jsou to právě speciální případy (I), (II) a (V).

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \left[\begin{array}{c} u = x-1 \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln|x-1| + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \left[\begin{array}{c} u = x-1 \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = \frac{1}{1-x} + C$$

a k výpočtu posledního integrálu si nejprve upravíme jmenovatele

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 2 = (x+1)^2 + 1.$$

Pak

$$\begin{aligned}\int \frac{x+8}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x+8}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = x+1 \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{array}\right] = \int \frac{u+7}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u + 7\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + 7\,\mathrm{arctg}\,u + C \\ &= \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+1) + 7\,\mathrm{arctg}(x+1) + C.\end{aligned}$$

Celkově dostáváme

$$I = \frac{1}{25}\ln|x-1| + \frac{1}{5}\frac{1}{1-x} - \frac{1}{50}\ln(x^2+2x+2) - \frac{7}{25}\,\mathrm{arctg}(x+1) + C.$$

6 Některé důležité substituce

Viz Kopáček (MA pro fyz. I.) strana 146 – stejnojmenná kapitola. (Nebudu vyžadovat znalost, ale můžou se hodit v dalším studiu).

Doporučená literatura

KOPÁČEK J. Matematická analýza pro fyziky I. Matfyzpress, Praha, 2005.
Krupková, Fuchs: Matematická analýza 1, elektronický text.