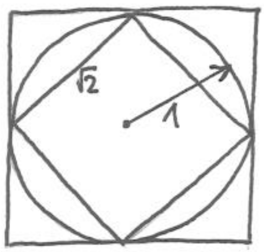
Riemannův integrál

Úvod

Určování obsahu rovinných obrazců patří mezi velmi staré problémy (matematické úlohy). Lidé potřebovali počítat obsahy z nejrůznějších důvodů – týkalo se to obchodu, určování výše daní, náboženství apod. Právě integrální počet odpovídá na mnohé takové otázky přesně. Pomocí něj si například odvodíme vzorec pro obsah kruhu.

Nejprve zkusme vymyslet přibližný výpočet obsahu kruhu (umíme-li počítat obsahy obdélníků a trojúhelníků).

Uvažujme kruh o poloměru 1. Tomuto kruhu vepíšeme a opíšeme čtverec – viz obrázek:

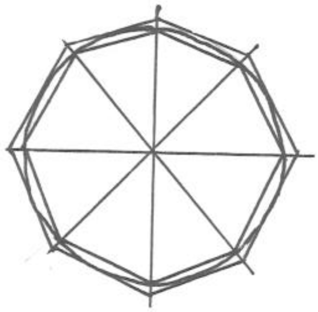


2

Je asi jasné že obsah kruhu S_o bude větší než obsah čtverce vepsaného a menší než obsah čtverce opsaného, tj

$$2=(\sqrt{2})^2 < S_o < 2^2 = 4$$

Máme tedy velmi hrubý odhad obsahu kruhu o poloměru 1 – – jde o číslo mezi číslem 2 a 4. Jak náš odhad zpřesnit? Třeba tak, že kruhu vepíšeme a opíšeme pravidelný osmiúhelník – viz obrázek:



Je opět jasné, že obsah osmiúhelníka vepsaného bude menší než obsah kruhu a obsah osmiúhelníka opsaného bude větší než obsah kruhu, tj.

$$2{,}8284 \doteq 2\sqrt{2} < S_0 < 8\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = (\sqrt{2}-1)\cdot 8 \doteq 3{,}3137.$$

(Obecně : Dá se dokázat – vepisováním a opisováním pravidelných n-úhelníků, že platí

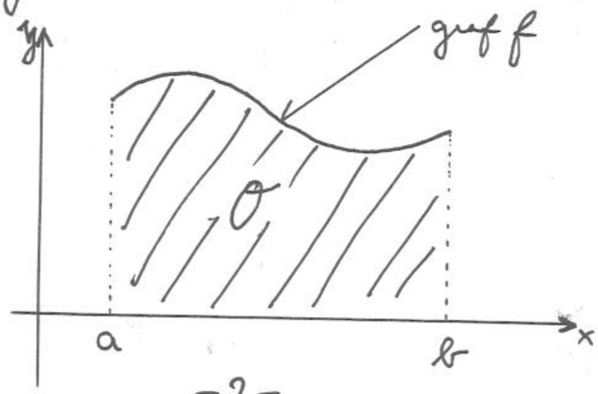
$$2^n \sin\frac{\pi}{2^n} < S_0 < 2^{n+1}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}).$$

Tuto metodu používali i lidé v dávných dobách. My se jí budeme inspirovat!

Formulujme problém obecně : Je dána nezáporná a omezená funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$. Určete obsah rovinného obrazce (= podmnožina v $\mathbb{R}^2$)

$$O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \le x \le b \ \wedge \ 0 \le y \le f(x)\},$$

viz obrázek :



Při počítání obsahu budeme využívat následující fakta:

(i) Jsou-li O_1, O_2 dva nepřekrývající se rovinné obrazce (nebo mající společnou část hranice), pak

$$S(O_1 \cup O_2) = S(O_1) + S(O_2)$$

kde $S(O)$ je „obsah" rovinného obrazce O.

(ii) Jsou-li O_1, O_2 rovinné obrazce takové, že $O_1 \subset O_2$, pak

$$S(O_1) \leq S(O_2).$$

(iii) Je-li O obdélník s délkami stran a a b, pak

$$S(O) = a \cdot b.$$

Nyní představíme hlavní myšlenku počítání obsahů rovinných obrazců ve tvaru

$$O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

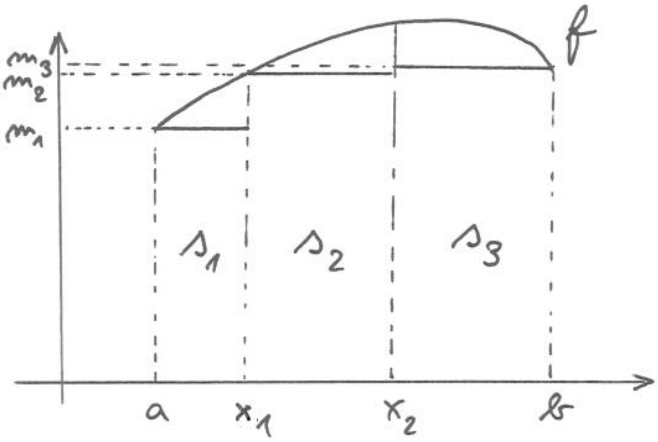
(tzv. podgraf funkce f). Funkce f bude spojitá a nezáporná.

Zvolme si uvnitř intervalu $\langle a, b \rangle$ body x_1, x_2 takové, že

$$a < x_1 < x_2 < b.$$

Uvažujme obdélníky s_1, s_2, s_3 tak, jak je uvedeno na následujícím obrázku, přitom zřejmě

$$m_1 = \min_{\langle a, x_1 \rangle} f, \quad m_2 = \min_{\langle x_1, x_2 \rangle} f, \quad m_3 = \min_{\langle x_2, b \rangle} f$$



Z (iii) je jasné, že

$$S(s_1) = m_1(x_1 - a),\quad S(s_2) = m_2(x_2 - x_1),\quad S(s_3) = m_3(b - x_2).$$

Útvar vzniklý sjednocením těchto obdélníků má pak vzhledem k (i) obsah roven, tj

$$S(s_1 \cup s_2 \cup s_3) = S(s_1) + S(s_2) + S(s_3).$$

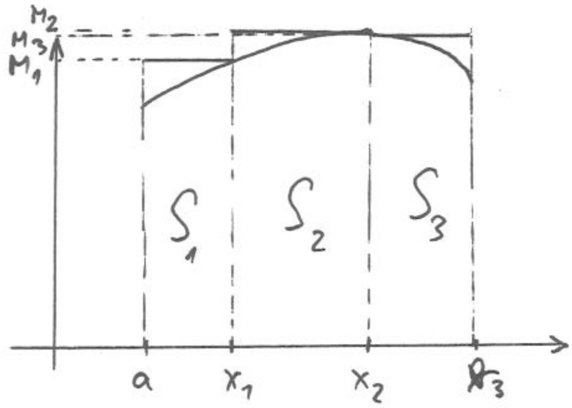
Navíc platí

$$s_1 \cup s_2 \cup s_3 \subset O$$

což podle (ii) znamená, že

$$S(s_1) + S(s_2) + S(s_3) \leq S(O)$$

Podobně, budeme uvažovat obdélníky S_1, S_2, S_3 tak, jak je uveden na následujícím obrázku



přitom $M_1 = \max\limits_{\langle a, x_1\rangle} f$, $M_2 = \max\limits_{\langle x_1, x_2\rangle} f$, $M_3 = \max\limits_{\langle x_2, b\rangle} f$.

Podobně jako u obdélníků s_1, s_2, s_3 dostáváme

$$S(\mathcal{O}) \le S(S_1) + S(S_2) + S(S_3).$$

Dohromady máme

$$m_1(x_1-a)+m_2(x_2-x_1)+m_3(b-x_2) \le S(\mathcal{O}) \le M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+M_3(b-x_2).$$

Máme tedy k dispozici hrubý odhad obsahu podgrafu funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ – tj. toto číslo máme odhadnuto zdola i shora.

Jak tento odhad zpřesnit? Jednoduše, přidáním dalších „dělicích" bodů x_i. Dá se očekávat, že čím více vezmeme dělicích bodů (které budou rovnoměrně pokrývat interval $\langle a, b\rangle$) tím lépe bude $\mathcal{O}$ aproximován.

Nyní jsme připraveni pustit se do definice Riemannova integrálu.

Definice Riemannova integrálu

Konstrukce Riemannova integrálu bude kopírovat předchozí úvahy. Nejprve nadefinujeme pomocné pojmy.

<u>Definice 1</u> Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Množinu $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ reálných čísel takových, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

nazveme dělením intervalu $\langle a, b\rangle$. Čísla x_i (kde $i \in \{0, \dots, n\}$) nazýváme i-tým dělicím bodem dělení D.
Interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ (kde $i \in \{1, \dots, n\}$) nazýváme i-tým dělicím intervalem dělení D.

Pro úplnost definujme tzv. „normu dělení" D

$$\nu(D) = \max_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1}).$$

Množinu všech dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ budeme značit symbolem $\Delta(\langle a, b\rangle)$.

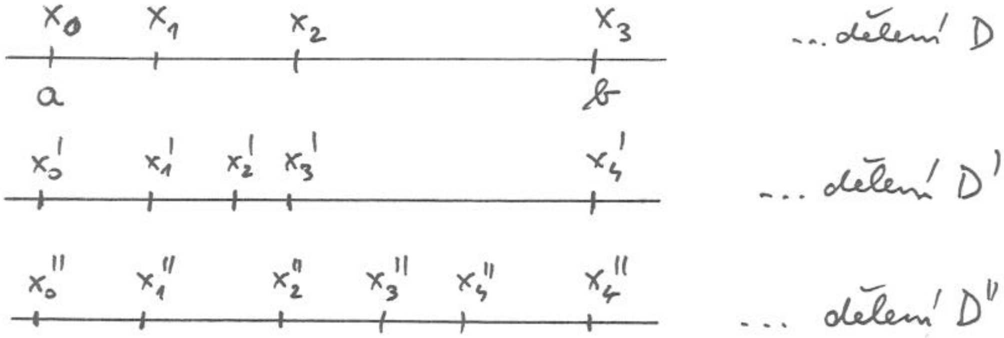
<u>Definice 2</u> Nechť $D, D' \in \Delta(\langle a, b\rangle)$. Řekneme, že D' je zjemněním dělení D, jestliže $D' \supset D$ (tzn. každý dělicí bod dělení D je také dělicím bodem dělení D'). Označujeme tento fakt jako $D' \succ D$.

<u>Poznámka 3</u> Název zjemnění je velmi průhledný – říká přesně to k čemu je určen. Viz motivační povídání na předchozích stranách – čím jemnější dělení, tím přesnější odhad obsahu.

<u>Příklad 4</u> Uvažujme dělení intervalu $\langle a, b\rangle$

$$D = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}, \quad D' = \{x'_0, \dots, x'_4\}, \quad D'' = \{x''_0, \dots, x''_5\}$$

definovaná na obrázcích:



Je vidět, že

$$D' \succ D, \; D'' \succ D \; \text{a} \; D' \not\succ D'', \; D'' \not\succ D'.$$

<u>Definice 5</u> Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ definujeme
(a) dolní Riemannův integrální součet:

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}),$$

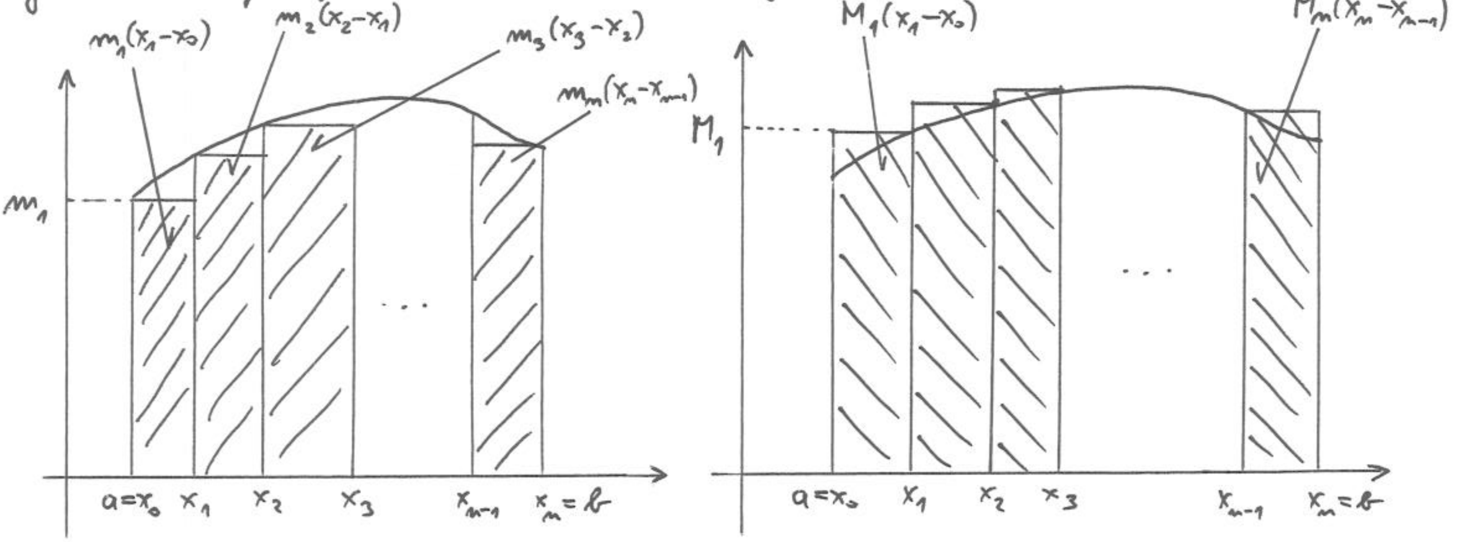
kde $m_i = \inf\limits_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f$ pro každé $i = 1, \dots, n$,

(b) horní Riemannův integrální součet:

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

kde $M_i = \sup\limits_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f$ pro každé $i = 1, \dots, n$.

<u>Poznámka 6</u>
(i) Podívejme se na geometrický význam čísel $s(f,D)$ a $S(f,D)$. Je-li f navíc nezáporná, mají tato čísla geometrický význam obsahů rovinných obrazců – viz obrázek.



(ii) Všimněte si, že čísla m_i a M_i jsou definována jako inf a sup (narozdíl od předchozí kapitoly, v níž jsme tato čísla definovali jako min a max – tam jsme si to mohli dovolit, proč?). Podíváte-li se na definici 5 pozorně, zjistíte, že jediný předpoklad, který jsme kladli na funkci f byla její omezenost. Právě ta nám zaručí, že čísla m_i a M_i budou konečná.

(iii) A ještě si všimněme, že v definici 5 se nechce po funkci f, aby byla nezáporná. Co to znamená pro geometrický význam součtů $s(f,D)$ a $S(f,D)$?

<u>Věta 7</u> Nechť f je omezená na $\langle a,b\rangle$, $D \in \Delta(\langle a,b\rangle)$. Pak

$$m(b-a) \le s(f,D) \le S(f,D) \le M(b-a)$$

kde $m = \inf\limits_{\langle a,b\rangle} f$, $M = \sup\limits_{\langle a,b\rangle} f$.

<u>Důkaz</u> Zvolme $i \in \{1,\dots,n\}$. Zřejmě pak

$$\inf_{\langle a,b\rangle} f \le \inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f \le \sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f \le \sup_{\langle a,b\rangle} f,$$

tj.

$$m \le m_i \le M_i \le M.$$

Vynásobíme-li tyto nerovnosti výrazy $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme přes $i = 1,\dots,n$, dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1})$$

tj.

$$m\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})}_{=b-a} \le s(f,D) \le S(f,D) \le M\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})}_{=b-a}.$$

$\square$

<u>Důsledek 8</u> Množiny

$$\{s(f,D) : D \in \Delta(\langle a,b\rangle)\} \text{ a } \{S(f,D) : D \in \Delta(\langle a,b\rangle)\}$$

jsou omezené zdola i shora ($\Rightarrow$ inf i sup těchto množin jsou konečná (reálná) čísla).

Poznámka 9 Co je vlastně množina

$$\{ s(f,D) : D \in \Delta(\langle a,b\rangle)\} \;?$$

Je to množina všech dolních odhadů obsahu podgrafu funkce f. Je asi jasné, že horkým kandidátem na obsah podgrafu funkce f bude supremum této množiny. Podobně, horkým kandidátem na obsah podgrafu funkce f je číslo

$$\inf \{ S(f,D) : D \in \Delta(\langle a,b\rangle)\}.$$

Definice 10 Nechť f je omezená funkce na $\langle a,b\rangle$. Číslo

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup \{ s(f,D) : D \in \Delta(\langle a,b\rangle)\}$$

nazýváme dolním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$. Číslo

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf \{ S(f,D) : D \in \Delta(\langle a,b\rangle)\}$$

nazýváme horním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Poznámka 11 Které číslo tedy určuje obsah podgrafu funkce f (na intervalu $\langle a,b\rangle$)? Intuice nám říká, že obě, neboť by tato čísla byla v tom případě rovna. Bohužel, to vždy není pravda, viz následující příklad.

Příklad 12 Uvažujme funkci $f : R \to R$ definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ 0, & x \notin Q. \end{cases}$$

Vypočítame
$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx \quad \text{a} \quad \overline{\int_0^1} f(x)\,dx.$$

Vezmeme libovolné dělení $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \Delta(\langle 0,1\rangle)$.
Pak
$$m_i = \inf_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f = 0, \quad M_i = \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f = 1$$
pro každé $i = 1, \ldots, n$. Z toho plyne, že
$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0 \quad \text{a} \quad \overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1,$$
jde tedy o různá čísla. Tato funkce bývá označována jako $\chi_{\mathbb{Q}}$.

V dalším příkladu si ukážeme, že tato čísla se mohou rovnat (a většinou tomu tak bude – např. u všech spojitých funkcí).

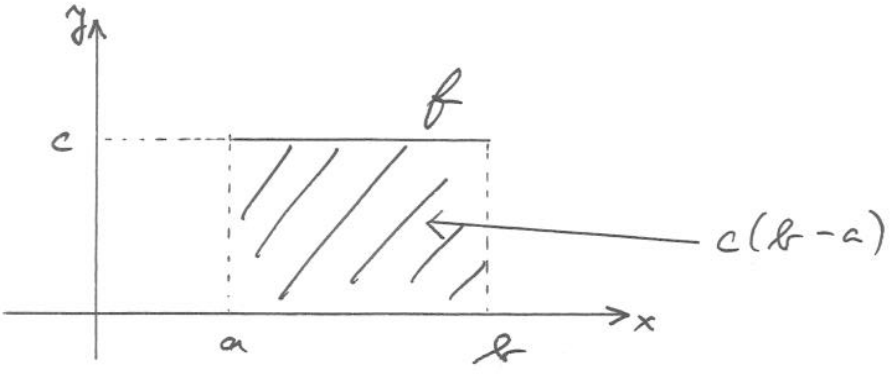
<u>Příklad 13</u> Uvažujme konstantní funkci definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$, tj.
$$f(x) = c, \quad x \in \langle a, b\rangle,$$
kde $c \in \mathbb{R}$. Vezmeme libovolné dělení $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak
$$m_i = \inf_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f = c, \quad M_i = \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f = c$$
pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$. Z toho plyne, že
$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$$
a podobně
$$S(f,D) = \ldots = c(b-a).$$
Pak také

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\, c(b-a) : D \in \Delta(\langle a, b\rangle)\} = c(b-a)$$

a

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \ldots = c(b-a).$$

Vidíme, že obě hodnoty jsou stejné. Čemu se rovnají? Pokud by $c \geq 0$, pak by funkce f byla nezáporná, a číslo $c(b-a)$ bude mít jednoduchou interpretaci. Jde o obsah obdélníku, který je podgrafem funkce f.



Výsledek tedy pro nás není žádným překvapením.

Nyní už slavnostně přistoupíme k definici Riemannova integrálu.

<u>Definice 14</u> Nechť f je omezená funkce na $\langle a, b\rangle$.
Jestliže

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

pak říkáme, že f je riemannovsky integrovatelná na (přes) intervalu $\langle a, b\rangle$ (nebo také „f má Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$"). Zkráceně zapisujeme $f \in R(\langle a, b\rangle)$. Někdy i slovo „riemannovsky" nebo „Riemannův" vynecháváme (pokud nehrozí nedorozumění).
Společnou hodnotu dolního a horního integrálu nazýváme Riemannovým integrálem (zkráceně integrálem) a značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,dx$.

Poznámka 15 Z příkladů 12 a 13 vidíme, že
$$\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,dx \quad \text{neexistuje}$$
a
$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

Poznámka 16 Integrál funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$ můžeme značit symboly
$$\int_a^b f(x)\,dx, \ \int_a^b f(t)\,dt, \ \int_a^b f(\xi)\,d\xi, \ \ldots$$
– všimněte si, že písmenko x (t, ξ) zde má charakter „sčítacího indexu".

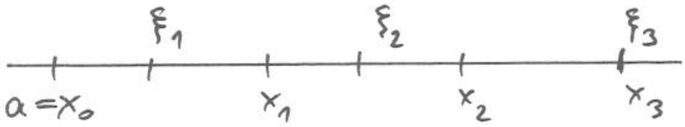
Integrál jako limita integrálních součtů

Podívejme se ještě na jiný způsob, jakým by šlo definovat Riemannův integrál. Tento postup nám ukáže způsob, jakým lze počítat integrály přibližně (třeba pomocí počítače).

Nejprve zavedeme potřebné pojmy.

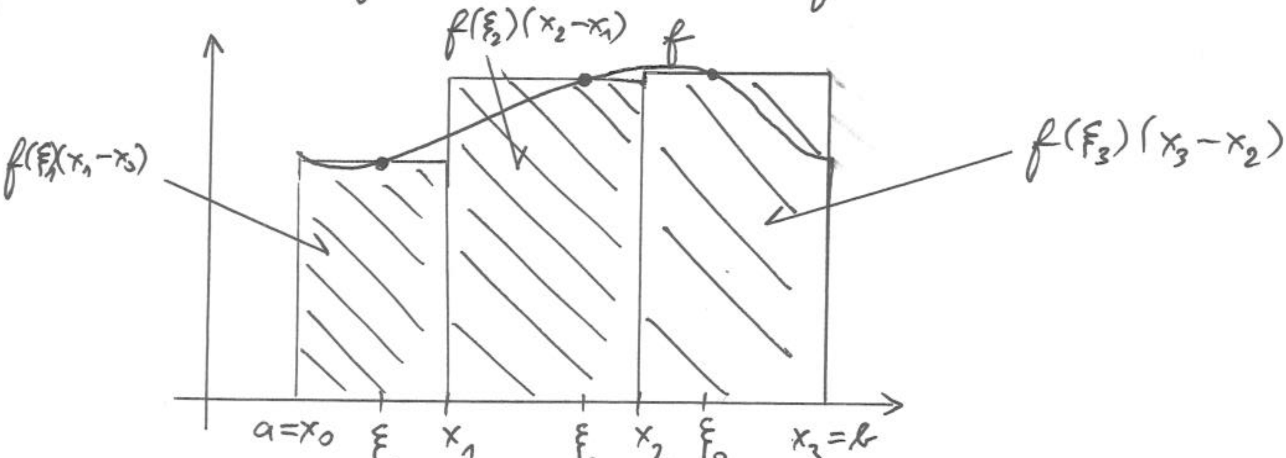
Definice 17 Nechť $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Množinu $V = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ takovou, že
$$\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$
nazýváme výběrem bodů k dělení D. Píšeme $V \sqsubset D$.

Příklad 18 Pro dělení $D = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ může výběr bodů $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ vypadat třeba takto:



Definice 19 Nechť f je omezená na $\langle a, b\rangle$, $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, $V = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \sqsubset D$.
Číslo
$$\sigma(f, D, V) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$$
nazýváme Riemannovým integrálním součtem funkce f příslušným dělení D a výběru V.

Poznámka 20 Nejdůležitější z této kapitoly je pochopení geometrického významu čísla $\sigma(f, D, V)$.



Vzhledem k předchozí kapitole by pro nás již neměl být problém vidět, že vyšrafovaná část na předchozím obrázku má obsah roven číslu $\sigma(f, D, V)$

Následující věta ukazuje vztah mezi Riemannovým integrálním součtem a Riemannovým integrálem (ukazuje nám alternativní definici Riemannova integrálu).

Věta 21 Nechť f je omezená na $\langle a, b\rangle$. Funkce f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,dx = I$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall D \in \Delta(\langle a, b\rangle)\ \forall V \sqsubset D : \nu(D) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, D, V) - I| < \varepsilon.$$

Věta tedy říká, že součty $\sigma(f,D,V)$ se při „zhušťování" dělení D (tzn. $\nu(D)$ se blíží k nule) blíží k $\int_a^b f(x)\,dx$ (tedy za předpokladu, že integrál existuje).
Tohoto faktu se dá s výhodou využít při přibližných výpočtech integrálů.

Vlastnosti Riemannova integrálu

Podíváme se na některé základní vlastnosti integrálu – pomohou nám při výpočtech.

<u>Věta 22</u> Nechť $f, g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Pak

(i) $f+g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a platí

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

(ii) pro každé $c \in \mathbb{R}$ platí $c\cdot f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a platí

$$\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

(iii) $f\cdot g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

<u>Důkaz</u> ad (i) Zvolme $D=\{x_0,\dots,x_n\} \in \Delta(\langle a,b\rangle)$. Pak platí (dokažte sami)

$$\inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f + \inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} g \le \inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle}(f+g) \le \sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle}(f+g) \le \sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f + \sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f.$$

Vynásobíme tyto nerovnosti výrazy $(x_i - x_{i-1})$ a sečteme přes $i=1,\dots,n$. Dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n}\inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f\,(x_i-x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n}\inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} g\,(x_i-x_{i-1}) \le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \inf_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} (f+g)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} (f+g)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f\,(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} g\,(x_i - x_{i-1})$$

tedy

$$(1)\quad s(f,D) + s(g,D) \leq s(f+g, D) \leq S(f+g, D) \leq S(f,D) + S(g,D).$$

Z první nerovnosti máme

$$s(f,D) + s(g,D) \leq s(f+g, D) \leq \underline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx.$$

Z definice dolního integrálu a druhé vlastnosti infima máme ke libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ dělení $D_1, D_2 \in \Delta(\langle a, c\rangle)$ taky, že

$$s(f, D_1) + \varepsilon > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

$$s(g, D_2) + \varepsilon > \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$$

Zvolme $D = D_1 \cup D_2$. Zřejmě $D \succ D_1$ a $D \succ D_2$.
Pak, s využitím faktu

$$\left[\; D' \succ D \Rightarrow s(f,D) \leq s(f,D') \;\wedge\; S(f,D) \geq S(f,D') \;\right]$$

(dokažte!)

dostáváme, že také

$$s(f,D) + \varepsilon > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{a} \quad s(g,D) + \varepsilon > \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$$

odkud sečtením dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx < s(f,D) + s(g,D) + 2\varepsilon \leq$$

$$\leq s(f+g, D) + 2\varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx + 2\varepsilon.$$

Poslední nerovnost ale platí pro libovolně malé $\varepsilon > 0$.
To je ovšem možné právě tehdy, když

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \le \underline{\int_a^b} f(x)+g(x)\,dx .$$

Podobným způsobem, s využitím poslední nerovnosti v (1), využitím definice horního integrálu lze dostat

$$\overline{\int_a^b} f(x)+g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)+g(x)\,dx .$$

Z posledních dvou nerovností a faktu

$$\underline{\int_a^b} f(x)+g(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)+g(x)\,dx$$

plyne, že

$$\underline{\int_a^b} f(x)+g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx .$$

Případ (ii) lze dokázat podobně.

Následují intuitivně jasné věty.

<u>Věta 23</u> (i) Nechť $h \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ je nezáporná na $\langle a,b\rangle$.
Pak

$$\int_a^b h(x)\,dx \ge 0 .$$

(ii) Nechť $f,g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a platí

$$f(x) \le g(x) \qquad \forall x \in \langle a,b\rangle .$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx .$$

Důkaz ad (i) Vezmeme libovolné $D \in \Delta(\langle a,b\rangle)$. Pak

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f}_{\ge 0} (x_i - x_{i-1}) \ge 0 .$$

Zřejmě pak
$$\int_a^b h(x)\,dx = \underline{\int_a^b} h(x)\,dx = \sup\{s(f,D) : D \in \Delta(\langle a,b\rangle)\} \geq 0.$$

ad (ii) Protože $f, g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ pak podle věty 22 a faktu
$$f - g = f + (-g)$$
platí $f - g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a
$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx. \tag{2}$$

Podle předpokladu je $f-g$ nezáporná na $\langle a,b\rangle$ a tedy z (i) dostáváme, že
$$0 \leq \int_a^b f(x) - g(x)\,dx.$$
Odtud a z (2) plyne tvrzení věty. $\square$

<u>Věta 24</u> Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Pak $|f| \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a platí
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

<u>Důkaz</u> Fakt, že $|f| \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ zde dokazovat nebudeme – – viz literatura. Dokážeme alespoň nerovnost.
Platí
$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \qquad \forall x \in \langle a,b\rangle.$$
Z věty 23 (ii) plyne, že
$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$
což znamená
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad \square$$

Následující důležitá věta s pěkným geometrickým významem.
Uvažujme nezápornou funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$ a bod $c \in (a, b)$
Jaký je vztah mezi

$$\int_a^c f(x)\,dx,\ \int_c^b f(x)\,dx \ \text{ a } \int_a^b f(x)$$

(kreslete si obrázek)? Odpověď dává věta 25:

<u>Věta 25</u> Nechť $f \in R(\langle a, b\rangle)$, $c \in (a, b)$. Pak $f \in R(\langle a, c\rangle)$ a $f \in R(\langle c, b\rangle)$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dá se dokázat i o něco obecnější věta, ale bez zvonosti.

<u>Věta 26</u> Nechť $f \in R(\langle a, b\rangle)$, $\langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Pak $f \in R(\langle \alpha, \beta\rangle)$.

<u>Postačující podmínky integrovatelnosti</u>

Doposud jsme se bavili o vlastnostech funkcí, o kterých předpokládáme že mají na jistém intervalu integrál.
Jenže jak jednoduše poznat, že daná funkce opravdu integrál (přes daný interval) má? Opět bez důkazu uvedeme následující snadno zapamatovatelná kritéria integrovatelnosti.

<u>Věta 27</u> (postačující podmínky integrovatelnosti)
Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\langle a, b\rangle \subset D(f)$. Jestliže platí alespoň jedna z podmínek
(i) f je spojitá na $\langle a, b\rangle$,
(ii) f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ až na konečný počet bodů
(iii) f je na $\langle a, b\rangle$ monotónní,
pak $f \in R(\langle a, b\rangle)$.

<u>Poznámka 28</u> Připomeňme, že z $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ vždy plyne, že f je omezená na $\langle a, b\rangle$.

Newtonův vzorec

V této kapitole se konečně podíváme na efektivní způsob výpočtu Riemannova integrálu. „Překvapivě" zjistíme, že integrály budeme počítat pomocí primitivní funkce integrované funkce (opravdu překvapivé by to bylo v případě, kdyby tomuto textu nepředcházel text o primitivních funkcích a kdybychom neměli téměř stejné značení pro primitivní funkce ($\int f(x)dx$) a pro integrál ($\int_a^b f(x)dx$).

Než k tomu dojde, je třeba se domluvit na značení:

<u>Definice 29</u> Pro funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $a \in D(f)$ definujeme

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Dále pro funkci $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ definujeme

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

<u>Poznámka 30</u> Tedy pokud se v mezích integrálu bude vyskytovat stejné číslo, bude integrál roven nule. A pokud bude horní mez menší než dolní mez, budeme takový integrál chápat jako opačné číslo k integrálu s prohozenými mezemi (tedy ve „správném" pořadí).

Lze pak dokázat (dokažte!)

<u>Věta 31</u> Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je integrovatelná na intervalu $\langle \min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}\rangle$. Pak

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Následující věta má zásadní význam – zejména tvrzení (ii).

<u>Věta 32</u> Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována na intervalu J a na každém jeho omezeném uzavřeném podintervalu má Riemannův integrál; $c \in J$.
Pak pro funkci $F_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt\,, \quad x \in J$$

platí
(i) F_c je spojitá na J, $F_c(c) = 0$,
(ii) je-li f spojitá v bodě $x_0 \in J$, pak

$$F_c'(x_0) = f(x_0)\,.$$

<u>Důkaz</u> Z předpokladu věty plyne, že pro každé $c, x \in J$ existuje

$$\int_c^x f(t)\,dt$$

(pokud $x \le c$, viz definici 29). Funkce F_c je tedy dobře definovaná pro všechna $x \in J$. Dokážeme, že platí tvrzení (i). Nechť nejprve $x_0 \in \operatorname{int} J$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \subset J\,.$$

Pak pro $\forall h \in \mathbb{R}$ takové, že $|h| < \delta$ platí

$$F_c(x_0+h) - F_c(x_0) = \int_c^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt =$$

$$\overset{\text{věta 31}}{=} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt + \int_c^{x_0} f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\,.$$

Pak

$$0 \le |F_c(x_0+h) - F_c(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \right| \le \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|\,dt \right|$$

$$\le \sup_{\langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle} |f| \cdot \left| \int_{x_0}^{x_0+h} dt \right| \overset{\text{příklad 13}}{=} \sup_{\langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle} |f| \cdot |h|$$

Označme $M = \sup_{\langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle} |f|$ (tedy M závisí na f, x_0, δ; a nezávisí na h).

Z věty o třech limitách platí

$$\lim_{h\to 0} |F_c(x_0+h) - F_c(x_0)| = 0$$

což je ekvivalentní s

$$\lim_{h\to 0} F_c(x_0+h) = F_c(x_0),$$

což znamená, že F_c je spojitá v bodě x_0. Kdyby x_0 byl pravý (resp. levý) krajní bod intervalu, místo intervalu $\langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle$ vezmeme interval $\langle x_0-\delta, x_0\rangle$ (resp. $\langle x_0, x_0+\delta\rangle$).

Nyní dokážeme tvrzení (ii). Opět, nechť $x_0 \in \operatorname{int} J$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle \subset J.$$

Pak pro každé $h \in \mathbb{R}$ takové, že $0 < |h| < \delta$ platí

$$\frac{F_c(x_0+h) - F_c(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - h f(x_0) \right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt \right) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt.$$

Ze spojitosti funkce f v bodě x_0 plyne, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta' > 0$ takové, že pro všechna $t \in D(f)$ platí

$$|t - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pro každé $h \in \mathbb{R}$ takové, že $\quad 0 < |h| < \min\{\delta, \delta'\}$ platí

$$\left| \frac{F_c(x_0+h) - F_c(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| \, dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon \, dt \right| = \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \varepsilon = \varepsilon ,$$

což neznamená nic jiného, než

$$F_c'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F_c(x_0+h) - F_c(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Kdyby x_0 byl bod z hranice intervalu J, důkaz se provede obdobně. □

Věta 33 Nechť f je spojitá na intervalu J. Pak má na J primitivní funkci. Pro $c \in J$ je primitivní funkce, která je v bodě c rovna nule, dána předpisem

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt , \quad x \in J.$$

Tato věta je přímým důsledkem věty 32. Nejen, že nám zaměřuje existenci primitivní funkce ke spojité funkci, ale také nám dává návod k jejímu výpočtu.

Důsledkem věty 33 je následující věta, která představuje avizovaný Newtonův vzorec.

Věta 34 Je-li f spojitá na $\langle a, b \rangle$, F je primitivní k f na $\langle a, b \rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Důkaz Nechť F je primitivní funkce k f na $\langle a, b \rangle$, $c \in J$ je libovolný! Pak z věty 33 plyne existence $C \in \mathbb{R}$ takového, že

$$F(x) = F_c(x) + C = \int_c^x f(t)\,dt + C, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

Pak také

$$F(b) - F(a) = C + \int_c^b f(t)\,dt - \left(C + \int_c^a f(t)\,dt \right) =$$
$$= \int_a^b f(t)\,dt.$$

□

Příklad 35 Vypočtěte
$$\int_0^1 x^4\,dx.$$

Řešení Protože $\frac{x^5}{5}$ je primitivní k x^4, máme
$$\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{1}{5}.$$

Zapisujeme to takto:
$$\int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{1}{5}.$$

Z věty o integraci per partes pro primitivní funkce lze snadno odvodit následující větu.

Věta 36 (o integraci per partes) Nechť u, v, u', v' jsou spojité na $\langle a, b\rangle$. Pak platí
$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Následuje věta o substituci (jen jedna ...).

<u>Věta 37</u> (o substituci) Nechť φ má na $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitou derivaci a f je spojitá na $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$. Pak platí

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

<u>Důkaz</u> Nejprve je třeba poznamenat, že ze spojitosti funkce φ na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ plyne, že $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ je uzavřený omezený interval (pokuste se dokázat), označme

$$\langle A, B \rangle = \varphi(\langle \alpha, \beta \rangle).$$

(a) Pokud by $A = B$, pak φ je konstantní, pak $\varphi'(t) = 0$ $\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Platilo by

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha)} f(x)\,dx = 0$$

a

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot 0\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} 0\,dt = 0.$$

Tedy rovnost by splněna byla.

(b) Nechť $A < B$. Definujme funkci

$$F(y) = \int_{A}^{y} f(x)\,dx, \quad y \in \langle A, B \rangle.$$

Protože

$$F'(y) = f(y) \qquad \forall y \in \langle A, B \rangle$$

platí také

$$\big(F(\varphi(t))\big)' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t) \quad \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

To znamená, že $F(\varphi(t))$ je primitivní funkce k $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$

na $\langle\alpha,\beta\rangle$. Podle Newtonova vzorce (věta 34) a definice F platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= \int_{A}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx - \int_{A}^{\varphi(\alpha)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx. \qquad \square$$

<u>Příklad 38</u> Vypočtěte

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

<u>Řešení</u> Definujeme funkci $\varphi(t) = \sin t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ ($\Rightarrow \varphi(\alpha) = 0$, $\varphi(\beta) = 1$) – nakreslete si graf funkce φ. Pak podle předchozí věty platí

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \ldots = \frac{\pi}{4}.$$