

Matematická analýza KMA/MA2I

Trojný integrál

1 Problém

Naše úvahy z předchozích přednášek zobecníme do tří dimenzí. Ve většině případů půjde o triviální zobecnění. Zajímavý zde bude snad jen výpočet trojného integrálu pomocí Fubiniovy věty a různé typy substitucí. Zaváděné pojmy již nebudeme motivovat geometrickou úlohou ale spíš úlohou fyzikální - stanovení hmotnosti nehomogenního tělesa.

Úloha 1 „Je dáno těleso $T \subset \mathbb{R}^3$, jehož hustota (rozložení hmotnosti) je popsána funkcí $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Určete hmotnost tohoto tělesa.“

Řešení tohoto problému bude zobecněním řešení problému určení objemu tělesa. Všimněte si, že kdyby byla funkce f rovna 1, tzn. hustota tělesa by byla rovna jedné, rovnala by se hmotnost tělesa objemu tohoto tělesa. Více na přednášce.

2 Trojný integrál přes kvádr

V této kapitole budeme uvažovat tři uzavřené a omezené intervaly $I, J, K \subset \mathbb{R}$ (pro určitost označíme $I = \langle a, b \rangle$, $J = \langle c, d \rangle$, $K = \langle e, f \rangle$) a funkci $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou a **omezenou** na obdélníku $I \times J \times K$.

Definice 2 Jsou-li $I, J, K \subset \mathbb{R}$ intervaly, pak kartézský součin $I \times J \times K$ nazýváme (trojrozměrným, třídimenčním) intervalem.

Poznámka 3 Jsou-li $I, J, K \subset \mathbb{R}$ kompaktní (tzn. uzavřené a omezené) intervaly, pak interval $I \times J \times K$ je kompaktní (tzn. uzavřená a omezená) množina v $\mathbb{R}^3$ – budeme mu říkat kompaktní interval.

Definice 4 Nechtě jsou dány kompaktní intervaly $I = \langle a, b \rangle$, $J = \langle c, d \rangle$, $K = \langle e, f \rangle$ a jejich dělení

$$D_I = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \Delta(I), \quad D_J = \{y_0, y_1, \dots, y_m\} \in \Delta(J), \\ D_K = \{z_0, z_1, \dots, z_\ell\} \in \Delta(K).$$

Pro $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, \ell$ definujeme dělicí interval

$$D_{ijk} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle \times \langle z_{k-1}, z_k \rangle.$$

Množinu všech D_{ijk} nazýváme síťovým dělením intervalu $I \times J \times K$.

Poznámka 5 Objem intervalu D_{ijk} je zřejmě roven $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$ a budeme ho značit symbolem $\mu(D_{ijk})$.

Poznámka 6 Z definice 4 je asi jasné, proč integrujeme přes trojrozměrný interval - ten si rozsekáme na trojrozměrné intervaly D_{ijk} . Hlavní výhoda spočívá v tom, že objem každého takového intervalu je snadno určitelný - viz poznámku 5.

Definice 7 *Nechť f je omezená funkce na intervalu $I \times J \times K$. Pro síťové dělení $D = \{D_{ijk}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, \ell\}$ intervalu $I \times J \times K$ definujeme*

(a) dolní Riemannův integrální součet

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\ell} m_{ijk} \mu(D_{ijk}),$$

kde $m_{ijk} = \inf_{D_{ijk}} f$ pro každé $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, \ell$ a

(b) horní Riemannův integrální součet

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\ell} M_{ijk} \mu(D_{ijk}),$$

kde $M_{ijk} = \sup_{D_{ijk}} f$ pro každé $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, \ell$.

Poznámka 8 *Co znamenají čísla $s(f, D)$ a $S(f, D)$? Vztáhneme-li tato čísla k problému na začátku tohoto textu, číslo $s(f, D)$ by byl dolní odhad hmotnosti tělesa T a číslo $S(f, D)$ byl horní odhad hmotnosti tělesa T .*

Věta 9 *Nechť f je omezená na kompaktním intervalu $I \times J \times K$, D je síťové dělení intervalu $I \times J \times K$. Pak*

$$m(b-a)(d-c)(f-e) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b-a)(d-c)(f-e),$$

kde

$$m = \inf_{I \times J \times K} f, \quad M = \sup_{I \times J \times K} f.$$

Proveďte důkaz – inspirujte se důkazem z přednášky o R-integrálu funkce jedné proměnné.

Důsledek 10 *Z věty 9 plyne, že množina*

$$\{s(f, D) : D \text{ je síťové dělení } I \times J \times K\}$$

je omezená zdola a množina

$$\{S(f, D) : D \text{ je síťové dělení } I \times J \times K\}$$

je omezená shora. Tedy infima a suprema těchto množin jsou konečná čísla.

Poznámka 11 Co je vlastně množina

$$\{s(f, D) : D \text{ je síťové dělení } I \times J \times K\}?$$

Jde o množinu všech dolních odhadů objemu tělesa T z úvodní kapitoly. Je asi jasné, že horkým kandidátem na hmotnost je supremum této množiny. Podobně, horkým kandidátem na hmotnost tělesa T je infimum množiny

$$\{S(f, D) : D \text{ je síťové dělení } I \times J \times K\}.$$

Definice 12 Nechť f je omezená funkce na kompaktním intervalu $I \times J \times K$. Číslo

$$\iiint_{I \times J \times K} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \sup\{s(f, D) : D \text{ je síťové dělení } I \times J \times K\}$$

nazýváme dolním Riemannovým integrálem funkce f přes interval $I \times J \times K$. Číslo

$$\overline{\iiint_{I \times J \times K} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz} = \inf\{S(f, D) : D \text{ je síťové dělení } I \times J \times K\}$$

nazýváme horním Riemannovým integrálem funkce f přes interval $I \times J \times K$.

Poznámka 13 Intuitivně očekáváme, že tato čísla jsou stejná a určují (pro $f \geq 0$) hmotnost tělesa T . Ovšem, stejně jako tomu bylo u funkce jedné a dvou proměnných, ne vždy to bude platit. Inspirování textem z minulé přednášky si zkuste zkonstruovat takovou funkci, pro kterou budou tato čísla různá.

Následující příklad ukazuje, že to tak špatné vždy nebude.

Příklad 14 Pro konstantní funkci $f(x, y, z) = \rho$ pro $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vypočtete

$$\iiint_{\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, f \rangle} f(x, y) \, dx \, dy \, dz \quad \text{a} \quad \overline{\iiint_{\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, f \rangle} f(x, y) \, dx \, dy \, dz}.$$

Řešení. Vezmeme libovolné síťové dělení $D = \{D_{ijk} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, \ell\}$ intervalu $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, f \rangle$. Pak

$$m_{ijk} = \inf_{D_{ijk}} f = \rho, \quad M_{ij} = \sup_{D_{ijk}} f = \rho$$

pro každé $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, \ell$. Z toho plyne, že

$$s(f, D) = \sum_{i,j,k=1}^{n,m,\ell} \rho \mu(D_{ijk}) = \rho \sum_{i,j,k=1}^{n,m,\ell} \mu(D_{ijk}) = \rho(b-a)(d-c)(f-e),$$

a

$$S(f, D) = \sum_{i,j,k=1}^{n,m,\ell} \rho \mu(D_{ijk}) = \rho \sum_{i,j,k=1}^{n,m,\ell} \mu(D_{ijk}) = \rho(b-a)(d-c)(f-e).$$

Pak

$$\begin{aligned} \iiint_{\langle a,b \rangle \times \langle c,d \rangle \times \langle e,f \rangle} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz &= \overline{\iiint_{\langle a,b \rangle \times \langle c,d \rangle \times \langle e,f \rangle} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz} \\ &= \rho(b-a)(d-c)(f-e). \end{aligned}$$

V tomto případě jsou hodnoty stejné. Čemu se rovnají? Je-li $\rho > 0$, pak jejich společná hodnota má jednoduchou fyzikální interpretaci. Jde o hmotnost homogenního kvádru o délkách hran $b-a$, $d-c$, $f-e$ a o hustotě ρ .

Nyní můžeme definovat (Riemannův) trojný integrál přes interval (kvádr).

Definice 15 *Nechť f je omezená na kompaktním intervalu $I \times J \times K$. Jestliže*

$$\overline{\iiint_{I \times J \times K} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz} = \iiint_{I \times J \times K} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz,$$

pak říkáme, že f má na intervalu $I \times J \times K$ (Riemannův) trojný integrál (je na $I \times J \times K$ integrovatelná). Jejich společnou hodnotu nazýváme (Riemannovým) trojným integrálem funkce f přes interval $I \times J \times K$ a značíme symbolem

$$\iiint_{I \times J \times K} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz.$$

Ještě uvedeme jednoduchou podmínku, pomocí které můžeme snadno zjistit, jestli je daná funkce na kompaktním intervalu integrovatelná.

Věta 16 *(postačující podmínka integrovatelnosti funkce na intervalu) Spojitá funkce na kompaktním intervalu je na něm integrovatelná.*

3 Trojný integrál přes měřitelnou množinu

Jak už jsme ale zmínili, chtěli bychom integrovat funkce na mnohem složitějších množinách než je interval (= kvádr). Rádi bychom integrovali na mnohostěnech, válkách, koulích, obecně na množinách, jejichž hranice je určena grafy spojitých funkcí dvou proměnných. Obecně, budeme integrovat (omezené) funkce přes takové množiny, u kterých umíme určit jejich „obsah.“ Obsah omezené množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ zde budeme definovat následujícím způsobem:

Definice 17 Řekneme, že množina M má objem (je rektifikovatelná; má Jordan–Peanův objem; je jordanovsky měřitelná; je měřitelná), jestliže funkce χ_M je integrovatelná na nějakém kompaktním intervalu $I \times J \times K$, pro který platí

$$M \subset I \times J \times K.$$

Objemem (Jordan–Peanovým objemem; Jordanovou mírou; mírou) množiny M rozumíme číslo

$$\mu(M) = \iiint_{I \times J \times K} \chi_M(x,y) \, dx \, dy \, dz.$$

Poznámka 18 Připomínám, že pro každou množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ definujeme tzv. charakteristickou funkci množiny M předpisem

$$\chi_M(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, y, z) \in M, \\ 0 & \text{pro } (x, y, z) \notin M. \end{cases}$$

Poznámka 19 Jak poznat měřitelnou množinu? Dá se dokázat, že

- množina v $\mathbb{R}^3$ jejíž hranice je tvořena konečným počtem ploch (tzn. obrazů kompaktní množiny v $\mathbb{R}^2$ spojitého zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$) je měřitelná,
- sjednocení a průnik konečného počtu měřitelných množin je měřitelná množina, rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.

Nyní se podívejme na Riemannův trojný integrál v plné obecnosti.

Definice 20 Nechť $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená na měřitelné množině $M \subset \mathbb{R}^3$. Definujeme funkci

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{pro } (x, y, z) \in M, \\ 0 & \text{pro } (x, y, z) \notin M. \end{cases}$$

Riemannovým trojným integrálem funkce f přes množinu M rozumíme integrál

$$\iiint_{I \times J \times K} f^*(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

kde $M \subset I \times J \times K$ a značíme ho symbolem

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Poznámka 21 Je asi jasné, že v definici 20 nezávisí na výběru kompaktního intervalu $I \times J \times K$.

Měřitelná množina M může být poměrně komplikovaná. My budeme v našich příkladech integrovat jen přes tzv. normální obory (jsou zobecněním elementárních oblastí). Budou to opět měřitelné množiny.

Definice 22 Normálním z -oborem rozumíme množinu

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B \wedge g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\},$$

kde B je uzavřená měřitelná množina v $\mathbb{R}^2$ a $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě na B , $g(x, y) \leq h(x, y)$ pro všechna $(x, y) \in B$.

Normálním y -oborem rozumíme množinu

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z, x) \in B \wedge g(z, x) \leq y \leq h(z, x)\},$$

kde B je uzavřená měřitelná množina v $\mathbb{R}^2$ a $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité na B ,
 $g(z, x) \leq h(z, x)$ pro všechna $(z, x) \in B$.
 Normálním x -oborem rozumíme množinu

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in B \wedge g(y, z) \leq z \leq h(y, z)\},$$

kde B je uzavřená měřitelná množina v $\mathbb{R}^2$ a $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité na B ,
 $g(y, z) \leq h(y, z)$ pro všechna $(y, z) \in B$.

Poznámka 23 Normální z -obor má objem roven

$$\iint_B (h(x, y) - g(x, y)) \, dx \, dy.$$

Podobně to lze říct o ostatních normálních oborech.

4 Vlastnosti trojného integrálu

Trojný integrál má stejné vlastnosti jako dvojný integrál. V následujících větách jsou shrnuty (bez důkazu) ty nejdůležitější.

Věta 24 *Nechť f, g mají na měřitelné množině $M \subset \mathbb{R}^3$ integrál. Pak*

- *pro $c, d \in \mathbb{R}$ platí*

$$\begin{aligned} \iiint_M cf(x, y, z) + dg(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= c \iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &+ d \iiint_M g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \end{aligned}$$

- *funkce $f \cdot g$ má integrál na M ,*
- *je-li $f \leq g$ na M , pak*

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \leq \iiint_M g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

- *funkce $|f|$ má integrál na M a platí*

$$\left| \iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \right| \leq \iiint_M |f(x, y, z)| \, dx \, dy \, dz,$$

- *je-li $\alpha \leq f(x, y, z) \leq \beta$ pro všechna $(x, y, z) \in M$, pak*

$$\alpha \mu(M) \leq \iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \leq \beta \mu(M).$$

Věta 25 Jsou-li M_1 a M_2 měřitelné množiny, $\text{int } M_1 \cap \text{int } M_2 = \emptyset$ a f má integrál na M_1 i M_2 , pak f má integrál na $M = M_1 \cup M_2$ a platí

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{M_1} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \iiint_{M_2} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Věta 26 (o střední hodnotě) Nechť $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovatelná na souvislé uzavřené množině $\bar{D}$. Pak existuje číslo $c \in \langle m, M \rangle$, kde $m = \inf_{\bar{D}} f$, $M = \sup_{\bar{D}} f$ tak, že

$$\iint_{\bar{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = c\mu(\bar{D}).$$

Je-li f na $\bar{D}$ spojitá, pak existuje bod $(\xi, \eta, \zeta) \in \bar{D}$ tak, že

$$\iint_{\bar{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = f(\xi, \eta, \zeta)\mu(\bar{D}).$$

Věta 27 (postačující podmínka integrovatelnosti) Nechť f je spojitá na uzávěru měřitelné množiny $M \subset \mathbb{R}^3$. Pak f je integrovatelná na M .

5 Metody výpočtu

V této kapitole se podíváme na efektivní metody výpočtu trojného integrálu. V následující větě si ukážeme, jak počítat dvojný integrál přes normální z -obor.

Věta 28 (Fubiniova) Nechť f je integrovatelná na normálním z -oboru $M \subset \mathbb{R}^3$, tj.

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B \wedge g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\},$$

kde B je uzavřená měřitelná množina v $\mathbb{R}^2$ a $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě na B , $g(x, y) \leq h(x, y)$ pro všechna $(x, y) \in B$. Existuje-li pro každé $(x, y) \in B$ integrál

$$\int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) \, dz,$$

pak platí

$$\iint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_B \left(\int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy.$$

Sami si můžete zformulovat Fubiniovu větu pro ostatní normální obory (prostou cyklickou záměnou proměnných).

Co vyplývá z Fubiniovy věty pro případ, kdy je M kompaktní interval?

5.1 Substitute v dvojném integrálu

Někdy může být množina přes kterou integrujeme docela komplikovaná. Sice to může být i normální obor, ale popis její hranice může být poměrně složitý. Podobně jako u dvojného integrálu si zformulujeme větu o substituci. Nejprve uvedeme potřebné definice.

Definice 29 Řekneme, že zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je třídy $\mathfrak{C}^1$ [čteme: „třídy cé jedna“] na uzavřené množině $K \subset \mathbb{R}^3$, má-li spojitě všechny parciální derivace na nějaké otevřené množině G , která je nadmnožinou K .

Definice 30 Nechť $D \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina. Zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nazveme regulární na D , jestliže

- Φ je prosté zobrazení na D ,
- Φ je třídy $\mathfrak{C}^1$ na $\overline{D}$,
- $\nabla\Phi(x, y, z)$ je regulární matice pro všechna $(x, y, z) \in D$ (nebo-li

$$\det(\nabla\Phi(x, y, z)) \neq 0 \quad \forall (x, y, z) \in D).$$

Poznámka 31 Dá se dokázat že následující zobrazení jsou na příslušných množinách regulární (budeme je pak využívat při integraci):

- cylindrické souřadnice:

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

na intervalu

$$G = \{(\rho, \varphi, z) : \varphi \in (-\pi, \pi), \rho \in (0, r), z \in (-h, h)\}$$

kde $r > 0$ a $h > 0$ jsou libovolná čísla (jakobián je roven ρ),

- sférické souřadnice:

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

na intervalu

$$G = \{(r, \varphi, \theta) : r \in (0, R), \varphi \in (-\pi, \pi), \theta \in (0, \pi)\}$$

kde $R > 0$ je libovolné číslo (jakobián je roven $r^2 \sin \theta$).

- zobecněné sférické souřadnice:

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} ar \cos \varphi \sin \theta \\ br \sin \varphi \sin \theta \\ cr \cos \theta \end{pmatrix}$$

(kde $a, b, c > 0$ jsou parametry) na intervalu

$$G = \{(r, \varphi, \theta) : r \in (0, R), \varphi \in (-\pi, \pi), \theta \in (0, \pi)\}$$

kde $R > 0$ je libovolné číslo (jakobián je roven $abcr^2 \sin \theta$).

K uvedeným zobrazením je nutné kreslit obrázky – provedeme na přednášce.

Nyní zformulujeme větu o substituci.

Věta 32 *Nechť zobrazení $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je regulární na měřitelné otevřené množině $D \subset \mathbb{R}^3$. Nechť $N \subset \bar{D}$ je měřitelná množina, $M = \Phi(N)$ a funkce f je omezená a spojitá na M . Pak*

$$\begin{aligned} \iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ = \iiint_N f(\Phi_1(u, v, w), \Phi_2(u, v, w), \Phi_3(u, v, w)) |\nabla \Phi(u, v, w)| \, du \, dv \, dw. \end{aligned}$$

6 Některé aplikace trojné integrálu

6.1 Hmotnost tělesa

Udává-li $\sigma(x, y, z)$ hustotu tělesa $M \subset \mathbb{R}^3$ (M je měřitelná množina), pak její hmotnost je rovna

$$h(M) = \iiint_M \sigma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

6.2 Výpočet statických momentů tělesa vzhledem k osám, rovinám

viz literaturu...

6.3 Výpočet momentu setrvačnosti tělesa

viz literaturu...

7 Vícerozměrný integrál

Jistě by po přednáškách o dvojném a trojném integrálu nebyl pro vás problém nadefinovat a zformulovat základní vlastnosti n -rozměrného integrálu – tento obecný případ najdete v doporučené literatuře.

Doporučená literatura

BABEC, J., HRŮZA, B.: Matematická analýza II, SNTL/ALFA, Praha, 1988.