Matematická analýza KMA/MA2I
Číselné řady

1 Úvod

Na této přednášce se budeme bavit o sčítání nekonečného (přesněji: spočetného) množství reálných čísel. Nebude to jen pro zábavu (jak by se mohlo zdát z následujícího příkladu). Pomocí řad (čísel, funkcí) jsou definována různá důležitá iracionální čísla, budeme umět přibližně vypočítat primitivní funkce, pro jejichž vyjádření nemáme klasické nástroje (třeba taky proto, že tyto primitivní funkce se nedají zapsat pomocí elementárních funkcí).

Příklad 1 (Achilles a želva) Achilles má závodit se želvou v běhu na 100 m. Protože je desetkrát rychlejší než želva, dá ji desetimetrový náskok. Po odstartování podle očekávání běží 10x rychleji a začně ji dohánět. Ovšem v okamžiku, kdy doběhne k místu odkud odstartovala želva, ta mezitím uběhla jeden metr a tedy v okamžiku, kdy je Achilles na 10. metru, želva je na 11. metru. Jakmile doběhne Achilles i tam, želva je opět o něco dál. Takovým způsobem lze argumentovat do nekonečna – vypadá to tak, že Achilles želvu nemůže nikdy dohonit.

Řešení. V okamžiku startu měla želva náskok 10 metrů. Jakmile Achilles tuto vzdálenost uběhl, želva měla náskok již pouze 1 metr. Jakmile Achilles uběhl i tento 1 metr, želva měla náskok 0,1 metru. Jakmile Achilles uběhl i tento decimetr, želva měla náskok 0,01 metru. atd... Lze tedy očekávat, že Achilles by doběhl želvu až na

$$10 + 1 + 0,1 + 0,01 + \dots \qquad \text{metru.}$$

Všimněte si, že jde o součet nekonečného množství čísel. Dříve se mělo za to, že součet nekonečného množství čísel nemůže být konečné číslo. To by pak znamenalo, že Achilles opravdu nemůže želvu dohonit. My ovšem víme (jde o součet geometrické řady - viz dále), že platí

$$10 + 1 + 0,1 + 0,01 + \dots = 11,\bar{1} = 11\frac{1}{9} \qquad \text{metru.}$$

Achilles doběhne želvu na $11,\bar{1}$. metru.

`http://fyzmatik.pise.cz/77253-paradox-achilles-a-zelva.html`
`http://www.youtube.com/watch?v=c6Wehv4y150&feature=related`

2 Základní pojmy

Definice 2 Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řadou reálných čísel budeme rozumět symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou vztahy

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ \dots, s_n = a_1 + \dots + a_n,\ \dots$$

nazýváme posloupností částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jestliže existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a má součet s (pak píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$). V opačném případě říkáme, že řada diverguje.

Poznámka 3 Číslo s_n nazýváme n–tým částečným součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka 4 Mohou tedy nastat pouze tyto čtyři situace:

- $s \in \mathbb{R}$ – řada konverguje,
- $s = \infty$ – řada diverguje k ∞,
- $s = -\infty$ – řada diverguje k $-\infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje – řada osciluje.

Nás bude v dalším zajímat hlavně jestli řada konverguje nebo ne, přičemž hodnota jejího součtu nebude až tak důležitá – taky z toho důvodu, že určení její přesné hodnoty je v mnoha případech extrémně složité.

Příklad 5 Jednou z mála číselných řad, o jejíž konvergenci máme úplnou informaci je řada geometrická, tzn. řada ve tvaru

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \left(= \sum_{n=0}^{\infty} aq^n \right),$$

kde $a \neq 0$, $q \neq 0$ jsou reálné parametry.
Rozlišíme dva případy:

(a) $q = 1$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \infty & \text{když} \quad a > 0, \\ -\infty & \text{když} \quad a < 0, \end{cases}$$

(b) $q \neq 1$. Pak lze psát

$$s_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a(1 + q + \dots + q^{n-1})\frac{1-q}{1-q} = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n.$$

Je zřejmé, že existence a případná hodnota limity $\lim_{n\to\infty} s_n$ závisí na

$$\lim_{n\to\infty} q^n.$$

Z předchozího semestru víme, že

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & q > 1, \\ 1 & q = 1, \\ 0 & |q| < 1, \\ \text{neexistuje} & q \leq -1. \end{cases}$$

Z bodů (a) a (b) dohromady dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \infty & q > 1, \\ \infty & q = 1 \wedge a > 0, \\ -\infty & q = 1 \wedge a < 0, \\ \frac{a}{1-q} & |q| < 1, \\ \text{řada osciluje} & q \leq -1. \end{cases}$$

Příklad 6 Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Řešení. Platí

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

Věta 7 *(Nutná podmínka konvergence) Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

Příklad 8 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2$$

Řešení. Kdyby řada konvergovala, musela by být limita $\lim_{n\to\infty} n^2$ rovna nule. To ovšem není splněno, protože

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty.$$

Řada nekonverguje.

Příklad 9 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$$

Řešení. Kdyby řada konvergovala, musela by být limita $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n^2$ rovna nule. To ovšem není splněno, protože $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n^2$ vůbec neexistuje.

Poznámka 10 Naopak toto tvrzení neplatí. Například tzv. harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguje k ∞, přitom $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Věta 11 *Nechť $p \in \mathbb{N}$. Pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ současně konvergují nebo divergují. Jestliže konvergují, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \ldots + a_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n.$$

Důkaz. Tvrzení věty je jasné z faktu, že

$$s_n = a_1 + \ldots + a_p + t_{n-p} \quad \text{pro } n > p,$$

kde s_n je n–tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a t_n je n–tý částečný součet řady $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$.

□

Věta 12 *(Bolzanova–Cauchyova podmínka konvergence řady) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když její posloupnost částečných součtů je cauchyovská, tzn.*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon)$$

Důkaz. Tvrzení je zřejmé z Bolzanovy–Cauchyovy podmínky pro konvergenci posloupností a faktu, že

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \quad \text{pro } n, p \in \mathbb{N},$$

kde s_n je n–tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Věta 13 *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t \in \mathbb{R}$ jsou konvergentní číselné řady. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ je konvergentní a její součet je roven $s + t$. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ konverguje a její součet je roven $k \cdot s$.*

Důkaz tohoto tvrzení je opět jednoduchý.

3 Řady s nezápornými členy

Řadou s nezápornými členy rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Je jasné, že pak pro částečné součty platí

$$s_{n+1} = a_{n+1} + s_n \geq s_n \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$

tedy $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost. Z předchozího semestru víme, že taková posloupnost má vždy limitu, a to buď vlastní nebo nevlastní. **Řady s nezápornými členy jsou tedy buď konvergentní nebo divergují k ∞.** Je asi jasné, že to je určeno tím, jestli je posloupnost částečných součtů omezená (shora) nebo ne.

Bude nás zejména zajímat, zda daná řada konverguje či ne. K tomu nám poslouží několik následujících kritérií (testů, postačujících podmínek).

Věta 14 *(srovnávací kritérium) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a platí*

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Pak platí:
Konverguje–li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Diverguje–li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak diverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Z podmínky (1) plyne, že

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n \leq b_1 + \ldots + b_n = t_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} t_n.$$

Odtud již plyne tvrzení věty. □

Poznámka 15 Předchozí věta platí i v případě, zaměníme–li předpoklad (1) předpokladem

$$a_n \le b_n \quad \text{pro skoro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 16 Dokažte, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

konverguje.

Řešení. Protože

$$n! \ge 2^n \quad \text{pro každé } n \ge 4.$$

Pak zřejmě

$$\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^n} \quad \text{pro každé } n \ge 4.$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentní geometrická řada, konverguje podle předchozí věty a poznámky i vyšetřovaná řada.

Věta 17 *(limitní srovnávací) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Pak platí:
Je–li $L < \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
Je–li $L > 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. Dokážeme jen první část. Nechť $L < \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Z limitní podmínky plyne, že k danému $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí implikace

$$n \ge n_0 \quad \Longrightarrow \quad L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon$$

a tedy

$$a_n < (L+\epsilon) b_n \quad \text{pro každé } n \ge n_0.$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(L+\epsilon)b_n$ a podle předchozí věty (a poznámky) i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Příklad 18 Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

Řešení. Protože $\frac{\pi}{2^n} \in (0, \pi)$, platí $\sin \frac{\pi}{2^n} > 0$ a tedy jde o řadu s nezápornými členy. Navíc platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} \pi = \pi \in (0, \infty).$$

Řada tedy konverguje právě tehdy, když konverguje geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. O té ovšem již víme, že je konvergentní.

Věta 19 *(odmocninové kritérium – Cauchyovo) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*
(i) Jestliže existuje $q \in \langle 0, 1)$ tak, že

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \textit{pro skoro všechna } n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(ii) Jestliže existuje

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \textit{pro nekonečně mnoho } n \in \mathbb{N}$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. (jen pro (i)) Platí–li (2), pak zřejmě také platí

$$a_n \leq q^n \quad \text{pro skoro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Z předpokladu plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ je konvergentní a podle srovnávacího kritéria dostáváme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. □

Věta 20 *(limitní odmocninové kritérium) Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy. Nechť existuje*

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Pak platí:
(a) Je–li $L \in \langle 0, 1)$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(b) Je–li $L > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. Je–li $L \in \langle 0, 1)$, pak z definice limity posloupnosti existuje $q \in (L, 1)$ takové, že pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$. Z věty 19 pak plyne, že řada konverguje.
Je–li $L > 1$, pak opět z definice limity posloupnosti platí $\sqrt[n]{a_n} > 1$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak opět z věty 19 plyne, že řada diverguje. □

Dalším kritériem je podílové kritérium – d'Alembertovo. Zmíníme pouze jeho limitní verzi.

Věta 21 *(limitní podílové kritérium) Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Nechť existuje*

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Pak platí:
(a) Je–li $L \in \langle 0, 1)$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(b) Je–li $L > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 22 *(limitní Raabeho kritérium) Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Nechť existuje*

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Pak platí:
(a) Je–li $L \in \langle 0, 1)$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
(b) Je–li $L > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Následující kritérium má pěkný geometrický význam.

Věta 23 *(integrální kritérium) Nechť f je nezáporná* **nerostoucí** *reálná funkce na intervalu $\langle 1, \infty)$, označme $a_n = f(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 24 Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

Řešení. Je–li $\alpha \leq 0$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} > 0$, tedy není splněna nutná podmínka konvergence. Řada pro $\alpha \leq 0$ diverguje. Nyní uvažujme $\alpha > 0$. Uvažujme funkci $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ na intervalu $\langle 1, \infty)$. Platí

$$f'(x) = -\alpha\frac{1}{x^{\alpha+1}} < 0 \quad x \in \langle 1, \infty)$$

tzn. f je klesající na $\langle 1, \infty)$. Navíc platí

$$f(n) = \frac{1}{n^\alpha} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pak podle integrálního kritéria závisí konvergence či divergence naší řady na integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Pro $\alpha = 1$ platí

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{\infty} = \infty.$$

Pro $\alpha \neq 1$ platí

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^{\infty} = \begin{cases} \infty & \text{pro} \quad \alpha \in (0,1), \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{pro} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

4 Řady s libovolnými členy

4.1 Alternující řady

Definice 25 Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá alternující, jestliže

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Pro vyšetření konvergence alternujících řad platí toto jednoduché tvrzení.

Věta 26 *(Leibnizovo kriterium) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada $\sum (-1)^{n-1} a_n$ konverguje právě tehdy, když*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

4.2 Absolutní a relativní konvergence

Věta 27 *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pak konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Důkaz. Použijeme Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. Z ní a konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ plyne, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n, p \in \mathbb{N}$ platí

$$n \geq n_0 \implies ||a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}|| < \epsilon$$

Protože

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| = ||a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}||$$

konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Poznámka 28 Vyšetřujeme–li tedy konvergenci řady s libovolnými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme místo ní vyšetřovat řadu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Pokud tato bude konvergentní, z předchozí věty plyne, že bude konvergovat i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Všimněte si, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je řada s nezápornými členy – můžeme na ni použít kritéria z předchozí kapitoly (a to je ten důvod proč jsme se nejprve omezili na řady s nezápornými členy).
Pozor: Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, pak z toho neplyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musí divergovat (příp. oscilovat).

Definice 29 Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ a přitom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně (neabsolutně).

Příklad 30 Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konverguje relativně, protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

a přitom se dá dokázat, že

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2.$$

Další kritéria pro řady s libovolnými členy: Abelovo, Dirichletovo (**domácí úkol**).

5 Přerovnávání řad

Definice 31 Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada, $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k(n)}$ vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka 32 Zobrazení k z předchozí definice je vlastně posloupnost přirozených čísel. Proto si dovolíme psát k_n namísto $k(n)$.

Příklad 33 Uvažuje řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

Vezmeme–li

$$\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \ : \ 2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9, \dots$$

pak přerovnaná řada je následující

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \dots$$

Přirozeně vzniká otázka zda přerovnáním konvergentní řady vznikne opět konvergentní řada. A pokud ano, je jejich součet shodný? Kdybychom sčítali konečný počet čísel, odpověď by byla samozřejmě kladná. Ovšem u nekonečných řad to již obecně neplatí. Viz následující dvě věty. První říká, že absolutně konvergentní řadu můžeme přerovnat jak chceme a vždy dostaneme stejný součet. Druhá věta říká, že relativně konvergentní řadu můžeme vždy přeuspořádat tak, aby konvergovala (divergovala) k libovolnému číslu.

Věta 34 *Nechť je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní. Pak každé přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ je také absolutně konvergentní a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}.$$

Věta 35 *(Riemannova) Nechť je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ relativně konvergentní, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ tak, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = a.$$

6 Součin řad

Kromě sčítání bychom ještě rádi uměli řady násobit. To již není tak jednoduché.

Uvažujme čísla $a_1, \dots, a_m$, $b_1, \dots, b_n$. Pak

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = (a_1 + \ldots + a_m) \cdot (b_1 + \ldots + b_n)$$
$$= a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_1 b_n + a_2 b_1 + \ldots + a_m b_n.$$

Součin těchto dvou součtů je roven součtu všech prvků tvaru

$$a_i b_j, \quad \text{pro } i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n.$$

Podobně budeme postupovat u součinu řad

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_j.$$

Z předchozí úvahy se zdá být rozumné, definovat jejich součin jako součet všech čísel tvaru

$$a_i b_j \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots,\ j = 1, 2, \dots,$$

tzn. součet členů „nekonečné matice“

$$\begin{array}{cccc} a_1 b_1, & a_1 b_2, & a_1 b_3, & \cdots \\ a_2 b_1, & a_2 b_2, & a_2 b_3, & \cdots \\ a_3 b_1, & a_3 b_2, & a_3 b_3, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Prvků v této „matici“ je spočetně mnoho – lze je tedy uspořádat do posloupnosti (označíme ji $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$) a sečíst její prvky (tzn. určit součet $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$).

Jsou–li řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutně konvergentní, platí očekávané tvrzení.

Věta 36 *Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ konvergují absolutně. Pak libovolný součin $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ těchto řad konverguje absolutně a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b.$$

Důkaz. viz Došlá, Novák, str. 33. □

Poznámka 37 Absolutní konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je poměrně silný předpoklad. Předchozí věta říká, že ať sečteme všechny čísla $a_i b_j$ jakkoliv (tzn. v jakémkoliv pořadí – jakkoliv je přeuspořádáme - viz kapitolu o přerovnání řad), výsledná řada bude mít očekávanou hodnotu součtu.

Tohoto výsledku jsme schopni dosáhnout i bez předpokladu absolutní konvergence řad, ovšem na úkor toho, že již nemůžeme řady sčítat naprosto libovolně.

Dirichletovým součinem řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ definovanou

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_n + \ldots + a_n b_n + a_n b_{n-1} \ldots + a_n b_1.$$

Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ definovanou

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1.$$

Věta 38 *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ jsou konvergentní řady a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je jejich Dirichletův součin. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je konvergentní a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b.$$

Důkaz. Označme $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Snadno se spočítá, že

$$s_n = t_n \cdot w_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Z předpokladů $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b$ plyne

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a \cdot b.$$

□

Věta 39 *(Mertensenova) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ jsou konvergentní řady, alespoň jedna z nich je absolutně konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je jejich Cauchyův součin. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je konvergentní a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b.$$

Doporučená literatura

KOPÁČEK J. Matematická analýza pro fyziky II. Matfyzpress, Praha, 2005.
DOŠLÁ, Z, NOVÁK V.: Nekonečné řady, Masarykova univerzita, Brno, 2002.

`http://www.math.muni.cz/~plch/nkpm/hlavni.pdf`