Matematická analýza KMA/MA2I
Posloupnosti funkcí

Naším cílem bude teorie mocninných a Fourierových řad. Jsou to řady funkcí – tzn. sčítáme tam nekonečný počet funkcí. Vzpomeneme–li si na minulou přednášku, definovali jsme konvergenci (resp. divergenci, oscilaci) číselné řady prostřednictvím limity posloupnosti jejích částečných součtů. To uděláme stejně i pro řady funkcí. Ale k tomu musíme nejprve představit teorii posloupností *funkcí*.

1 Základní definice a značení

Mějme dánu neprázdnou množinu $D \subset \mathbb{R}$ a funkce $f_n : D \to \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Budeme říkat, že na množině D je definována *posloupnost funkcí* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, což také zapisujeme takto

$$f_1, f_2, f_3, \dots$$

Poznámka 1 Pokud si pamatujete na definici posloupnosti ze začátku minulého semestru, lze posloupnost funkcí definovat (matematicky korektněji) takto:

Nechť $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ je množina všech reálných funkcí definovaných na množině D. Pak zobrazení

$$f : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$$

nazýváme posloupností funkcí z $\mathcal{F}$ (nebo také – definovaných na množině D).

Příklad 2 Posloupnostmi funkcí na $\mathbb{R}$ jsou např.

$$f_n(x) = \sin(nx),\ x \in \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = x^n,\ x \in \mathbb{R}$$

2 Bodová konvergence posloupnosti funkcí

Definice 3 Nechť $D \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných funkcí definovaných na množině D.

(1) Říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v bodě $\bar{x} \in D$, jestliže posloupnost $\{f_n(\bar{x})\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

(2) Říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (bodově) konverguje na množině $M \subset D$ jestliže $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje ve všech bodech množiny M. Funkci $f : M \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{pro každé } x \in M \tag{1}$$

nazýváme limitou posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na množině M. Pak říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k f bodově na M a značíme „$f_n \to f$ na M pro $n \to \infty$".

(3) Množinu všech bodů množiny D, ve kterých posloupnost konverguje, nazýváme oborem konvergence.

Příklad 4 Uvažujme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = e^{-nx^2}$ (definiční obor těchto funkcí je množina všech reálných čísel). Tedy platí

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= e^{-x^2} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R},\\
f_2(x) &= e^{-2x^2} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R},\\
f_3(x) &= e^{-3x^2} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R},\\
&\dots
\end{aligned}$$

Nyní nás zajímá otázka, zda tato posloupnost má limitu (chceme určit obor konvergence a funkci f z definice 3). K nalezení limitní funkce použijeme vztah (1). Zvolíme pevně číslo $x \in \mathbb{R}$ a budeme zkoumat hodnoty posloupnosti $\{e^{-nx^2}\}$ (opět připomínám, že vyšetřujeme konvergenci **číselné posloupnosti**, což již dávno umíme) pro n rostoucí nade všechny meze. Zřejmě platí

$$e^{-nx^2} = (e^{-x^2})^n$$

z čehož je vidět, že pro $x = 0$ posloupnost konverguje k číslu 1 a pro $x \neq 0$ jde k 0 (protože $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ pro $|q| < 1$). Tedy posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x = 0,\\ 0 & \text{pro} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$.

Příklad 5 Uvažujme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(x) = x^n$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. S využitím znalosti vlastností geometrické posloupnosti zjistíme, že posloupnost konverguje pouze pro $x \in (-1, 1]$. Limitní funkce má předpis

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in (-1, 1), \\ 1 & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

Příklad 6 Uvažujme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ pro všechna $x \in (0, \infty)$. Pro pevně zvolené $x > 0$, $x \neq 1$ platí

$$f_n(x) = \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}\ln x} - 1}{\frac{1}{n}\ln x} \ln x,$$

tedy $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \ln x$ pro všechna $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, kde jsme využili znalosti limity

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

Pro $x = 1$ platí $f_n(1) = 0$, tedy $f(1) = 0 = \ln 1$. Posloupnost $\{f_n\}$ tedy konverguje k $f(x) = \ln x$ pro všechna $x > 0$.

3 Stejnoměrná konvergence posloupností funkcí

Na rozdíl od posloupností reálných čísel, můžeme u posloupností funkcí uvažovat více typů konvergence. V příkladech 4 a 5 sice byly členy posloupností spojité funkce, ale jejich limita už spojitá nebyla. Jak zajistit, aby se vlastnost spojitosti zachovala i po limitním přechodu? Je vidět, že k tomu nám obyčejná bodová konvergence nestačí. Budeme proto definovat mnohem silnější pojem konvergence.

Definice 7 Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na neprázdné množině $D \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní na množině $M \subset D$, jestliže existuje funkce $f : M \to \mathbb{R}$ taková, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in M)(n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon).$$

Poznámka 8 (1) Všimněte si, že pokud posloupnost stejnoměrně konverguje na nějaké množině, tak na ní i bodově konverguje – přitom funkce f z definic 3 a 7 jsou totožné. Pozor! Jestliže posloupnost konverguje bodově na nějaké množině, neznamená to, že na ní konverguje i stejnoměrně. Pojem stejnoměrné konvergence je mnohem silnější.

(2) Srovnáme pojem stejnoměrné a bodové konvergence. Mějme dánu posloupnost reálných funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, definovaných na $D \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset D$. Všimněte si, že tvrzení $f_n \to f$ na M se dá zapsat jako

$$(\forall x \in M)\ (\forall \epsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon).$$

Přitom tvrzení $f_n \rightrightarrows f$ na M znamená podle definice

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in M)\ (n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon).$$

Tyto dvě definice se liší *jen* v umístění výrazu $(\forall x \in M)$. Rozdíl je v tom, že u bodové konvergence může přirozené číslo n_0 být pro každé x jiné, ale u stejnoměrné konvergence existuje pouze jedno pro všechna $x \in M$ **současně**. Stejnoměrná konvergence se někdy charakterizuje právě tímto faktem, tzn. že n_0 závisí pouze na volbě ϵ a nikoliv na x.

Příklad 9 Uvažujme posloupnost a její limitu z příkladu 5. Ukážeme, že tato posloupnost nekonverguje stejnoměrně ke své limitě na intervalu $(-1, 1)$. Tedy máme ukázat, že existuje takové $\epsilon > 0$, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ existují $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, 1)$ tak, že

$$n \geq n_0 \quad \wedge \quad |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon.$$

To se dá přeformulovat také tak, že máme ukázat existenci $\epsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_m\} \subset (-1, 1)$ tak, že $|f_m(x_m) - f(x_m)| \geq \epsilon$ pro všechna $m \in \mathbb{N}$. Položme $\epsilon = \frac{1}{2}$ a najdeme $x_m \in (-1, 1)$ tak, že $|x_m^m - 0| \geq \frac{1}{2}$. Stačí vzít $x_m = \sqrt[m]{\frac{1}{2}}$. Pak opravdu

$$|f_m(x_m) - f(x_m)| = \left| \left(\sqrt[m]{\frac{1}{2}} \right)^m - 0 \right| = \frac{1}{2} \quad \text{pro všechna } m \in \mathbb{N}.$$

Věta 10 *(Bolzanova–Cauchyova nutná a postačující podmínka stejnoměrné konvergence) Posloupnost $\{f_n\}$ stejnoměrně konverguje na množině M právě tehdy, když pro každé $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n, m \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in M$ platí*

$$n \geq n_0 \wedge m \geq n_0 \quad \implies \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme nutnou podmínku. Nechť tedy posloupnost $\{f_n\}$ stejnoměrně konverguje k funkci f na M. K libovolnému $\epsilon > 0$ lze tedy nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{pro všechna } x \in M.$$

Tedy pro každou dvojici čísel n, $m \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq n_0$ a $m \geq n_0$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Nyní dokážeme postačující podmínku. Předpokládejme, že je splněna podmínka věty 10. Pak zřejmě platí, že pro každé $x \in M$ splňuje posloupnost $\{f_n(x)\}$ Bolzano–Cauchyovu podmínku pro číselné posloupnosti. Existuje tedy vlastní limita $\lim_{n\to\infty} f_(x)$ pro všechna $x \in M$. Tuto limitu označíme symbolem $f(x)$. Tím je definována funkce $f : M \to \mathbb{R}$, která je bodovou limitou posloupnosti $\{f_n\}$. Stačí tedy jen dokázat, že konvergence je stejnoměrná. Z naší podmínky plyne, že k libovolnému $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna m, $n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{pro všechna } x \in M.$$

Přejdeme–li v této nerovnosti k limitě pro $m \to \infty$, dostáváme

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \qquad \text{pro všechna } x \in M,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 11 *(Nutná a postačující podmínka stejnoměrné konvergence) Nechť je dána posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a funkce $f : M \to \mathbb{R}$. Označíme–li*

$$\sigma_n = \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| \qquad \textit{pro všechna } x \in M,\ n \in \mathbb{N},$$

pak

$$f_n \rightrightarrows f \quad \textit{na } M \qquad \textit{právě tehdy, když} \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0.$$

Věta 10 je nejznámější a nejdůležitější nutnou a postačující podmínkou stejnoměrné konvergence. Používá se zejména při důkazech tvrzení. Oproti tomu věta 11 dává praktický návod, jak zjistit, zda daná posloupnost funkcí stejnoměrně konverguje nebo ne.

Příklad 12 Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$$

na

(a) intervalu $[0, 1]$,

(b) intervalu $[1, \infty)$.

Řešení: Zřejmě $f_n \to 0$ na $[0, \infty)$ (a označíme tedy $f(x) = 0$ pro všechna $x \in [0, \infty)$). Dále si všimněme, že $f_n(x) > 0$ pro všechna $x \in (0, \infty)$, f_n jsou spojité na $[0, \infty)$, $f_n(0) = 0$ a $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(a) Uvažujme tedy funkce f_n pouze na intervalu $[0,1]$. Abychom mohli použít větu 11, je nutné určit σ_n pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (pro $M = [0,1]$). Z vlastností funkcí z naší posloupnosti plyne, že

$$\sigma_n = \max_{x\in[0,1]} f_n(x).$$

Funkce f_n zřejmě může nabývat svého maxima buď v krajních bodech definičního intervalu nebo ve stacionárních bodech. Stacionární body jsou body, ve kterých má daná funkce nulovou derivaci. Tedy určíme první derivaci

$$f_n'(x) = \frac{2n(1-nx^2)}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Zřejmě $f_n'(x) = 0$ právě tehdy když $1 - nx^2 = 0$, tedy $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (rovnici totiž řešíme pouze na intervalu $(0,1)$). Platí

$$f_n(0) = 0, \qquad f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \sqrt{n}, \qquad f_n(1) = \frac{2n}{1+n^2}.$$

Z toho vyplývá, že $\sigma_n = \sqrt{n}$, tedy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty \neq 0$. Tedy $\{f_n\}$ definovaná na $[0,1]$ nekonverguje stejnoměrně ke své limitní funkci.

(b) Nyní uvažujme funkce f_n definované pouze na intervalu $[1,\infty)$. Opět z vlastností funkcí naší posloupnosti dostáváme, že

$$\sigma_n = \max_{x\in[1,\infty)} f_n(x).$$

Podobně jako v předchozí části je nutné určit přesnou hodnotu σ_n pro každé $n \in \mathbb{N}$. Lehce se přesvědčíme, že funkce f_n jsou nerostoucí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (třeba tak, že spočítáme f_n' a pozorujeme, že f_n' jsou nekladné na intervalu $[1,\infty)$). Z toho zřejmě vyplývá, že

$$\sigma_n = f_n(1) = \frac{2n}{1+n^2}.$$

Tentokrát ovšem $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, z čehož vyplývá, že posloupnost $\{f_n\}$ stejnoměrně konverguje na $[1,\infty)$.

4 Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností funkcí

Pojem stejnoměrné konvergence se zavádí zejména kvůli možnosti záměny limit a dalších vlastností. Vlastně všechny tyto vlastnosti se dají dokázat z následující věty.

Věta 13 *(o limitě, Moore–Osgoodova) Nechť f_n, $f : (c, c+\delta) \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f_n \rightrightarrows f$ na $(c, c+\delta)$. Dále nechť existují vlastní limity*

$$\lim_{x \to c+} f_n(x) (=: b_n) \qquad \textit{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Pak také existují $\lim_{x\to c+} f(x)$ a $\lim_{n\to\infty} b_n$ a jsou si rovny, tedy platí

$$\lim_{x \to c+} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to c+} f_n(x). \tag{2}$$

Důkaz. (nebude u zkoušky vyžadován) Podle předpokladu konverguje posloupnost $\{f_n\}$ k funkci f na $(c, c+\delta)$, tedy z B–C podmínky plyne, že pro všechna $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé m, $n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{pro všechna } x \in (c, c+\delta). \tag{3}$$

Když v (3) přejdeme k limitě pro $x \to c+$, dostaneme

$$|b_n - b_m| \leq \frac{\epsilon}{3} < \epsilon,$$

takže posloupnost $\{b_n\}$ splňuje B–C podmínku pro číselné posloupnosti, je tedy konvergentní. Označme $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Nyní stačí jen dokázat, že $\lim_{x\to c+} f(x) = b$, tzn. ukázat, že

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in (c, c+\delta))(c < x < c + \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - b| < \epsilon).$$

Zvolme $\epsilon > 0$. Ze stejnoměrné konvergence plyne existence čísla $n_1 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{pro všechna } x \in (c, c+\delta),\ \text{všechna } n \geq n_1.$$

Dále (protože $\lim_{n\to\infty} b_n = b$) existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{pro všechna } n \geq n_2.$$

Zvolme nyní $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tak, že platí $\bar{n} \geq \max\{n_1, n_2\}$. Pak (z faktu $\lim_{x\to c+} f_{\bar{n}}(x) = b_{\bar{n}}$) existuje $\delta_1 > 0$, $\delta_1 \leq \delta$ tak, že

$$|f_{\bar{n}}(x) - b_{\bar{n}}| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{pro všechna } x \in (c, c+\delta_1).$$

Z posledních třech nerovností pro $n = \bar{n}$ vyplývá

$$\begin{aligned}|f(x) - b| &= |f(x) - f_{\bar{n}}(x) + f_{\bar{n}}(x) - b_{\bar{n}} + b_{\bar{n}} - b| \\ &\leq |f(x) - f_{\bar{n}}(x)| + |f_{\bar{n}}(x) - b_{\bar{n}}| + |b_{\bar{n}} - b| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

pro každé $x \in (c, c + \delta_1)$. $\square$

Poznámka 14 (důležitá) Všimněte si, že vztah (2) vlastně říká, že u stejnoměrně konvergentní posloupnosti funkcí lze zaměnit pořadí vyhodnocování limit pro $x \to c+$ a $n \to \infty$.

Poznámka 15 Podobné tvrzení jako je ve větě 13 lze vyslovit pro $x \to c-$ i pro $x \to c$. Vyslovte taková tvrzení a dokažte!

Příklad 16 Uvažujme posloupnost $\{f_n\}$ definovanou předpisem

$$f_n(x) = x^n \qquad \text{pro každé } x \in (-1, 1).$$

Lehce se můžeme přesvědčit, že tato posloupnost má limitu – tou je funkce $f(x) = 0$ definovaná pro všechna $x \in (-1, 1)$. Vypočítejme nyní limity

$$\lim_{x \to 1-} \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad \text{a} \qquad \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 1-} f_n(x).$$

Zřejmě $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} x^n = 0$ pro všechna $x \in (-1, 1)$. Z čehož vyplývá, že

$$\lim_{x \to 1-} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0.$$

Dále platí, že $\lim_{x \to 1-} f_n(x) = \lim_{x \to 1-} x^n = 1^n = 1$ a tedy

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 1-} f_n(x) = 1.$$

V tomto případě tedy není možná záměna limit. Důvodem je fakt, že posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje stejnoměrně ke své limitě f (o tom se můžete snadno přesvědčit použitím věty 11 – viz příklad 12) na žádném levém okolí bodu $x = 1$. Pokud bychom vyšetřovali rovnost limit

$$\lim_{x \to -1+} \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad \text{a} \qquad \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to -1+} f_n(x)$$

došli bychom ke stejnému závěru (zde dokonce ani není splněna podmínka existence vlastní limity $\lim_{n \to \infty} b_n$ z věty 13). Naopak rovnost

$$\lim_{x \to 0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 0} f_n(x).$$

již splněna je, protože $f_n \rightrightarrows f$ na každém uzavřeném podintervalu intervalu $(-1, 1)$ (tedy i na nějakém okolí bodu $x = 0$).

Další věty nám umožní přenášet vlastnosti funkcí z posloupnosti na limitní funkci.

Věta 17 *(O spojitosti limitní funkce) Nechť* $J \subset \mathbb{R}$ *je neprázdný interval,* $f_n : J \to \mathbb{R}$ *jsou spojité funkce a* $f : J \to \mathbb{R}$*. Jestliže* $f_n \rightrightarrows f$ *na* J*, pak* f *je spojitá na* J*.*

Důkaz. Vezmeme libovolný bod c z intervalu J, který není jeho pravým hraničním bodem. Ze spojitosti funkcí f_n plyne, že $\lim_{x\to c+} = f_n(c)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. S využitím věty 13 a konvergence posloupnosti $\{f_n\}$ v bodě c dostáváme

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \lim_{x\to c+} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to c+} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(c) = f(c).$$

Podobně můžeme vzít libovolný bod c z intervalu J takový, že není jeho levým hraničním bodem. S využitím poznámky 15 dostáváme

$$\lim_{x\to c-} f(x) = f(c).$$

Z těchto úvah plyne, že je–li c vnitřním bodem intervalu J, pak f je spojitá v c, je–li c levým hraničním bodem intervalu J a $c \in J$, pak f je spojitá v c zprava a je–li c pravým hraničním bodem a $c \in J$, pak f je spojitá v c zleva. □

Poznámka 18 Jak jsme viděli v příkladech ze začátku textu, pokud posloupnost spojitých funkcí konverguje k limitní funkci pouze bodově a nikoliv stejnoměrně, nemusí se být limitní funkce spojitá.

Věta 19 *(O záměně limity a derivace) Nechť* $J \subset \mathbb{R}$ *je neprázdný kompaktní interval, funkce* $f_n : J \to \mathbb{R}$ *mají spojitou derivaci* f_n' *definovanou na intervalu* J[1] *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *. Nechť*

(i) posloupnost $\{f_n\}$ *konverguje alespoň v jednom bodě,*

(ii) posloupnost $\{f_n'\}$ *konverguje stejnoměrně na* J*.*

Pak

(a) posloupnost $\{f_n\}$ *konverguje stejnoměrně na* J*, označíme* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$*,*

(b) existuje derivace f' *na* J *a platí*

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_n' \tag{4}$$

Důkaz. (nebude vyžadován u zkoušky) Nejprve dokážeme tvrzení (a). K tomu stačí dokázat, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje B–C podmínku. Zvolme libovolně ale pevně $\epsilon > 0$. Z (i) plyne existence $c \in \langle a, b\rangle$ takového, že $\{f_n(c)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní posloupnost, a tedy splňuje B–C podmínku pro posloupnosti

[1] Derivací v krajních bodech intervalu J chápeme jednostranou derivaci.

čísel. Tedy existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ splňující nerovnosti $m, n \geq n_1$ platí

$$|f_m(c) - f_n(c)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5}$$

Z předpokladu (ii) plyne zase existence $n_2 \in \mathbb{N}$ takového, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m, n \geq n_2$ platí

$$|f'_m(t) - f'_n(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \qquad \text{pro každé } t \in \langle a, b \rangle. \tag{6}$$

Položíme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \langle a, b \rangle$, $x \neq c$ existuje $\xi \in \langle a, b \rangle$ ležící mezi body x a c takové, že

$$\frac{(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(c) - f_n(c))}{x - c} = f'_m(\xi) - f'_n(\xi)$$

(větu o střední hodnotě diferenciálního počtu jsme použili na funkci $f_m - f_n$ na intervalu o hraničních bodech x a c). Úpravou dostáváme

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(c) - f_n(c) + (f'_m(\xi) - f'_n(\xi))(x - c).$$

Jsou–li $m, n \geq n_0$ pak z (5) a (6) vyplývá

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(c) - f_n(c)| + |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)||x - c| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \epsilon.$$

Z věty 10 plyne, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní na $\langle a, b \rangle$; její limitu označíme jako f.
Nyní dokážeme část (b). Z předpokladu (ii) vyplývá existence funkce $g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ takové, že $f'_n \rightrightarrows g$ na $\langle a, b \rangle$. Dokážeme, že $g = f'$ na $\langle a, b \rangle$. Nejprve vezmeme $x \in [a, b)$ a dokážeme rovnost $g(x) = f'_+(x)$. Platí

$$\begin{aligned} f'_+(x) &= \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0+} \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \\ &= \lim_{n \to \infty} \lim_{h \to 0+} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \lim_{n \to \infty} (f_n)'_+(x) = g(x), \end{aligned}$$

přičemž jsme použili větu 13 – viz dále. Podobně, vezmeme–li $x \in (a, b]$, dá se dokázat rovnost $g(x) = f'_-(x)$. Což bylo třeba dokázat.
Ještě je potřeba ukázat, že použití věty 13 bylo oprávněné! Musíme ověřit, že byly splněny předpoklady této věty. Označíme

$$\varphi_n(h) = \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \qquad \text{a} \qquad \varphi_n(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $h \in (0, \delta)$, kde $\delta > 0$ a $x \in [a, b)$ jsou pevně daná čísla. Aplikujeme Moore–Osgoodovu větu na funkce $\varphi_n, \varphi : (0, \delta) \to \mathbb{R}$. Zřejmě existují vlastní limity

$$\lim_{h \to 0+} \varphi_n(h) = \lim_{h \to 0+} = \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = (f_n)'_+(x).$$

Stačí tedy již ověřit, že φ_n konverguje stejnoměrně k φ na $(0,\delta)$. K tomu opět použijeme větu 10. Pro každé $m,n \in \mathbb{N}$ a h lze najít $\xi \in (0,\delta)$ ležící mezi body 0 a h tak, že platí

$$\begin{aligned}\varphi_m(h) - \varphi_n(h) &= \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} - \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}\\ &= \frac{1}{h}[(f_m(x+h) - f_n(x+h)) - (f_m(x) - f_n(x))]\\ &= \frac{1}{h}h(f'_m(\xi) - f'_n(\xi)) = f'_m(\xi) - f'_n(\xi)\end{aligned}$$

Protože $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje B–C podmínku na $\langle a,b\rangle$, pak díky těmto rovnostem ji splňuje i posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ na $(0,\delta)$ (proč?). $\square$

Věta 20 *(O integraci) Nechť $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f_n : \langle a,b\rangle \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, existuje Riemannův integrál $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b). Pak existuje Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Důkaz. Z předpokladu $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b\rangle$ plyne, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \langle a,b\rangle$ platí

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $n \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x\\ &\leq (b-a) \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f_n(x) - f(x)| \leq (b-a)\frac{\epsilon}{2(b-a)} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. $\square$

Poznámka 21 Opět platí, že pokud posloupnost funkcí nekonverguje stejnoměrně ke své limitní funkci na $\langle a,b\rangle$, pak nemusí platit (7) – viz následující příklad.

Příklad 22 Uvažujme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na intervalu $\langle 0,1\rangle$ předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0,\\ n & x \in (0, 1/n),\\ 0 & x \in \langle 1/n, 0\rangle \end{cases}$$

Pak zřejmě

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$

$f_n \to 0$ na $\langle 0, 1\rangle$. Tedy neplatí (7), protože

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \not\to \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

Důvodem je právě fakt, že $f_n \not\rightrightarrows f$ na $\langle 0, 1\rangle$.

Doporučená literatura

KOPÁČEK J. Matematická analýza pro fyziky II. Matfyzpress, Praha, 2005.
DOŠLÁ, Z, NOVÁK V.: Nekonečné řady, Masarykova univerzita, Brno, 2002.

`http://www.math.muni.cz/~plch/nkpm/hlavni.pdf`