

Matematická analýza KMA/MA2I

Mocninné řady, Taylorovy řady

Minulou přednášku jsme si povídali o teorii řad funkcí obecně. Nyní se podíváme na dva speciální typy řad – mocninné a Fourierovy. Lze očekávat, že pro speciální typy řad budeme schopni toho říct více než o řadách obecně a budou mít již nějaké praktické využití.

1 Mocninné řady

Mocninnou řadou budeme rozumět řadu funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots, \quad (1)$$

kde $c_n \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$. Tyto řady mají velký význam při aproximaci funkcí – např. při určování přibližných hodnot funkcí, přibližném řešení diferenciálních rovnic (viz Došlá, Novák), atd...

Poznámka 1 Všimněte si, že n -tý člen i částečný součet mocninné řady je polynom. Tedy je to funkce spojitá, kterou můžeme libovolně derivovat a na libovolném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ má taková funkce Riemannův integrál. Výborně se tedy hodí k aproximaci funkcí – viz kapitolu o Taylorových řadách. Jak dále uvidíme, budeme schopni i lecos říct o stejnoměrné konvergenci – bez které by nám řady funkcí moc k ničemu nebyly.

Definice 2 Mocninou řadou o středu a rozumíme funkční řadu ve tvaru (1). Číslo a nazýváme střed mocninné řady (1), c_n nazýváme koeficienty řady (1) pro $n \in \mathbb{N}_0$ a c_0 nazýváme absolutní člen.

1.1 Obor konvergence mocninné řady

Nejprve se podívejme na množinu, na které mocninná řada (bodově) konverguje.

Poznámka 3 Řada (1) konverguje vždy pro $x = a$ (součet je roven c_0).

Věta 4 *Nechť řada (1) konverguje pro $x = \bar{x}$ ($\bar{x} \neq a$). Pak řada absolutně konverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, pro který platí*

$$|x - a| < |\bar{x} - a|,$$

tzn. pro $x \in (a - |\bar{x} - a|, a + |\bar{x} - a|)$.

Důkaz. Předpokládejme, že (1) konverguje v bodě $x = \bar{x}$, přičemž $\bar{x} \neq a$. Z nutné podmínky konvergence číselné řady plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(\bar{x} - a)^n = 0,$$

to znamená, že (číselná) posloupnost $\{c_n(\bar{x} - a)^n\}$ je ohraničená, tedy existuje $K > 0$ tak, že

$$|c_n(\bar{x} - a)^n| \leq K \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0.$$

Vezmeme $x \in \mathbb{R}$ takové, že $|x - a| < |\bar{x} - a|$ a dokážeme, že v něm řada (1) konverguje absolutně. Pro takové x zřejmě platí

$$\left| \frac{x - a}{\bar{x} - a} \right| < 1. \quad (2)$$

Pak

$$|c_n(x - a)^n| = |c_n(\bar{x} - a)^n| \left| \frac{x - a}{\bar{x} - a} \right|^n \leq K \left| \frac{x - a}{\bar{x} - a} \right|^n.$$

Z (2) plyne, že řada $\sum K \left| \frac{x-a}{\bar{x}-a} \right|^n$ je konvergentní, a tedy i řada $\sum |c_n(x - a)^n|$ konverguje. $\square$

Důsledek 5 *Jestliže existuje bod $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ takový, že řada (1) v $\tilde{x}$ diverguje, pak řada diverguje ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$ takových, že $|x - a| > |\tilde{x} - a|$ (tedy na intervalu $(-\infty, a - |\tilde{x} - a|) \cup (a + |\tilde{x} - a|, \infty)$).*

Důkaz. Kdyby řada (1) konvergovala v některém bodě $x \in \mathbb{R}$ takovém, že $|x - a| > |\tilde{x} - a|$, pak z věty 4 vyplývá, že by musela konvergovat i v bodě $\tilde{x}$, což je ve sporu s předpokladem. $\square$

Poznámka 6 Kreslete si obrázky – umístění bodů $\bar{x}$, $\tilde{x}$ vzhledem k a .

Věta 7 *K mocninné řadě (1) lze přiřadit jednoznačně číslo $\rho \in [0, \infty)$ nebo $\rho = \infty$ tak, že řada ve všech bodech x splňujících $|x - a| < \rho$ absolutně konverguje a ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$ splňujících $|x - a| > \rho$ diverguje.*

Poznámka 8 Věta 7 tedy říká, že pro konvergenci mocninné řady může nastat pouze jeden z následujících třech případů:

1. Řada (1) absolutně konverguje pro $x = a$ a diverguje na $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ (případ $\rho = 0$).
2. Řada (1) absolutně konverguje na celém $\mathbb{R}$ (případ $\rho = \infty$).
3. Řada (1) absolutně konverguje na intervalu $(a - \rho, a + \rho)$, diverguje na intervalech $(-\infty, a - \rho)$ a $(a + \rho, \infty)$, přičemž o konvergenci řady v bodech $x = a - \rho$ a $x = a + \rho$ nic věta 7 neříká - viz příklady 12 – 16 (případ $0 < \rho < \infty$).

Je vidět, že číslo ρ z věty 7 obsahuje zásadní informaci o oboru konvergence mocninné řady, takže si ho nějak pojmenujeme.

Definice 9 Číslo ρ z předchozí věty nazýváme poloměr konvergence řady (1).

Poznámka 10 Při vyšetřování konvergence mocninné řady tedy stačí pouze určit poloměr konvergence a vyšetřit body na hranici oboru konvergence (v případě, že $0 < \rho < \infty$).

Následující věta nám dá návod, jak poloměr konvergence efektivně vypočítat.

Věta 11 *Pro poloměr konvergence platí:*

- (a) $\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$
- (b) *existuje-li* $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda$, *pak* $\rho = \frac{1}{\lambda},$
- (c) *existuje-li* $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lambda$, *pak* $\rho = \frac{1}{\lambda}.$

Jestliže $\lambda = \infty$, pak pokládáme $\rho = 0$ a pokud $\lambda = 0$, pak pokládáme $\rho = \infty$.

1.2 Příklady

Příklad 12 Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$$

Vyšetřete konvergenci této řady!

Řešení: Konvergenci řady můžeme vyšetřovat postupy z kapitoly *Posloupnosti a řady funkcí*, nebo můžeme využít speciálních vlastností mocninných řad. V našem případě jde o mocninnou řadu o středu $a = 0$ s koeficienty

$$c_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0.$$

Jak bylo řečeno, pro vyšetřování oboru konvergence mocninné řady bude pro nás mít význam poloměr konvergence. Ten vypočítáme podle věty 11. Použijeme třeba druhý vztah ve zmíněné větě, to znamená spočítáme limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Podle věty 11 dostáváme $\rho = 2$ a z poznámky 8 vyplývá, že uvedená mocninná řada konverguje absolutně pro všechna $x \in (-2, 2)$, diverguje pro všechna $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Zbývá vyšetřit konvergenci v bodech $x = -2$ a $x = 2$. Pro $x = -2$ dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

což je divergentní řada. Pro $x = 2$ dostáváme řadu, jejíž členy jsou rovny 1, tedy rovněž divergentní číselnou řadu.

Závěr: Řada absolutně konverguje na intervalu $(-2, 2)$ a diverguje na $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

Příklad 13 Je dána řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x-2)^n$$

Vyšetřete konvergenci této řady!

Řešení: Střed řady je roven $a = 2$ a snadno se dá spočítat, že poloměr této řady $\rho = 1$. Řada tedy absolutně konverguje na $(2-1, 2+1)$ a diverguje na $(-\infty, 2-1) \cup (2+1, \infty)$. Pro $x = 1$ a $x = 3$ jde o absolutně konvergentní řady. *Závěr:* Řada absolutně konverguje na intervalu $[1, 3]$ a diverguje na $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Příklad 14 Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (x+1)^n$$

Vyšetřete konvergenci této řady!

Řešení: Střed řady je roven $a = -1$ a snadno se dá spočítat, že poloměr této řady je roven $\rho = 1$. Řada tedy absolutně konverguje na $(-1-1, -1+1)$ a diverguje na $(-\infty, -1-1) \cup (-1+1, \infty)$. Pro $x = -2$ řada relativně (neabsolutně) konverguje a pro $x = 0$ řada diverguje.

Závěr: Řada absolutně konverguje na intervalu $(-2, 0)$, relativně konverguje pro $x = -2$ a diverguje na $(-\infty, -2) \cup [0, \infty)$.

Příklad 15 Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+3)^n$$

Vyšetřete konvergenci této řady!

Řešení: Střed řady je roven $a = -3$ a snadno se dá spočítat, že poloměr této řady je roven $\rho = \infty$.

Závěr: Řada absolutně konverguje na $\mathbb{R}$.

Příklad 16 Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! (x-1)^n$$

Vyšetřete konvergenci této řady!

Řešení: Střed řady je roven $a = 1$ a snadno se dá spočítat, že poloměr této řady je roven $\rho = 0$.

Závěr: Řada absolutně konverguje pro $x = 1$ a diverguje na $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

1.3 Operace s mocninnými řadami

Uvažujme dvě mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \quad \text{s poloměrem konvergence } \rho_1 > 0, \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad \text{s poloměrem konvergence } \rho_2 > 0. \quad (4)$$

Definice 17 Mějme dány řady (3) a (4). Součtem (rozdílem) řad (3) a (4) rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n) (x-a)^n \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - c_n) (x-a)^n \right).$$

Pro $k \in \mathbb{R}$ rozumíme k -násobkem řady (3) řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} k b_n (x-a)^n.$$

Součinem (Cauchyovým) řad (3) a (4) rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-a)^n$$

kde $d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Věta 18 *Mějme dány řady (3) a (4). Pak jejich součet a rozdíl jsou mocninné řady s poloměrem konvergence $\rho \geq \min\{\rho_1, \rho_2\}$ a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n \pm c_n)(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

pro každé $x \in (a - \rho, a + \rho)$. Je-li $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, pak k -násobek řady (3) má stejný poloměr konvergence jako řada (3) a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} k b_n(x-a)^n = k \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \quad \text{pro každé } x \in (a - \rho_1, a + \rho_1).$$

Součin řad (3) a (4) má poloměr konvergence roven $\rho \geq \min\{\rho_1, \rho_2\}$ a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \right)$$

pro každé $x \in (a - \rho, a + \rho)$, kde d_n jsou koeficienty z definice 17.

Příklad 19 Je dána funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}.$$

Určete mocninnou řadu se středem $a = -1$, jejíž součet je funkce f (na nějakém okolí bodu -1 – určete toto okolí).

Řešení. K tomu abychom ji mohli určit, provedeme rozklad funkce $f(x)$ na parciální zlomky. Jednoduše se dá vypočítat, že

$$f(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{x+3}$$

pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$. Zřejmě platí

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2-(x+1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2} \right)^n = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x+1)^n$$

pro $|(x+1)/2| < 1$ a

$$\frac{1}{x+3} = -\frac{1}{-2-(x+1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x+1}{-2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{-2} \right)^n = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x+1)^n$$

pro $|(x+1)/(-2)| < 1$. Z předchozí věty tedy platí

$$f(x) = -\frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x+1)^n + \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1 + (-1)^n}{8 \cdot 2^n} (x+1)^n$$

pro všechna $|x + 1| < 2$, tzn. $x \in (-3, 1)$.

Nyní spočítáme poloměr konvergence takové řady. Zřejmě

$$c_{2m} = 0 \quad \text{a} \quad c_{2m+1} = -\frac{1}{4 \cdot 2^{2m+1}} \quad \text{pro každé } m \in \mathbb{N}_0.$$

Z toho je vidět, že sice $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ neexistuje, ale

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[2m+1]{|c_{2m+1}|} = \frac{1}{2},$$

tzn. $\rho = 2$.

Závěr. Platí

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1 + (-1)^n}{8 \cdot 2^n} (x + 1)^n, \quad \text{pro každé } x \in (-3, 1).$$

1.4 Lokální stejnoměrná konvergence a její důsledky

Věta 20 *Nechť má řada (1) kladný poloměr konvergence, tzn. $\rho > 0$ (ρ tedy může být rovno ∞). Pak řada (1) konverguje stejnoměrně na intervalu $[a - r, a + r]$ pro všechna $0 < r < \rho$.*

Důkaz. Vezmeme $r \in \mathbb{R}$ takové, že $0 < r < \rho$. Zřejmě

$$|c_n(x - a)^n| \leq |c_n|r^n \quad \text{pro všechna } x \in [a - r, a + r] \text{ a všechna } n \in \mathbb{N}_0.$$

Podle předpokladu mocninná řada absolutně konverguje v bodě $x = r$, tzn.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|r^n < \infty.$$

Podle Weierstrassovy věty pak řada (1) konverguje stejnoměrně na množině $[a - r, a + r]$. $\square$

Poznámka 21 Zavedeme-li pojem tzv. lokálně stejnoměrné konvergence – řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *lokálně stejnoměrně konverguje* na intervalu J jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na každém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset J$ – lze Větu 20 vyslovit takto:

Mocninná řada lokálně stejnoměrně konverguje na $(a - \rho, a + \rho)$.

Poznámka 22 Je-li poloměr konvergence kladný, pak lze zřejmě definovat funkci $f : (a - \rho, a + \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n \quad \text{pro každé } x \in (a - \rho, a + \rho).$$

V dalším se budeme zabývat vlastnostmi této funkce (součtu řady).

Důsledek 23 *Součet mocninné řady (1) je spojitá funkce na intervalu $(a - \rho, a + \rho)$.*

Důkaz. Vezmeme-li libovolný bod $x \in (a - \rho, a + \rho)$, pak zřejmě existuje $r > 0$ takové, že $r < \rho$ a $x \in (a - r, a + r)$. Protože členy řady (1) jsou spojitě funkce na $\mathbb{R}$, pak její součet je spojitá funkce na intervalu $[a - r, a + r]$, speciálně i v bodě x . $\square$

Díky lokálně stejnoměrné konvergenci můžeme řadu derivovat i integrovat člen po členu – to má velký praktický význam.

Věta 24 *(o derivování a integrování mocninné řady) Má-li mocninná řada (1) poloměr konvergence $\rho > 0$ a funkce $f : (a - \rho, a + \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ je její součet. Pak funkce f má na intervalu $(a - \rho, a + \rho)$ derivaci a primitivní funkci a platí*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - a)^{n-1} \quad \text{pro každé } x \in (a - \rho, a + \rho) \quad (5)$$

$$a \quad \int_a^x f(t) \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1} \quad \text{pro každé } x \in (a-\rho, a+\rho). \quad (6)$$

Uvedené mocninné řady mají poloměr konvergence roven ρ .

Důsledek 25 *Součet f mocninné řady (1) s kladným poloměrem konvergence ρ má spojité derivace všech řádů na intervalu $(a-\rho, a+\rho)$ a platí*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) c_n (x-a)^{n-k}$$

pro každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$.

2 Taylorovy řady

Uvažujme následující problém:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Je dána reálná funkce } f \text{ definovaná na nějakém okolí bodu } a. \\ \text{Existuje mocninná řada o středu } a \text{ konvergující na nějakém okolí} \\ \text{bodů } a \text{ k funkci } f? \end{array} \right\} \quad (7)$$

Tato otázka by mohla být motivována následujícím příkladem.

Příklad 26 Vypočítejte přibližnou hodnotu čísla $e^{0,01}$ s přesností na 5 desetinných míst.

Řešení: Dá se spočítat, že

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}$$

(určením této rovnosti se budeme zabývat právě v této kapitole). Tedy funkce e^x je součtem mocninné řady

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

s poloměrem konvergence $\rho = \infty$ (spočítejte ho užitím věty 11). Pak také zřejmě

$$e^{0,01} = 1 + \frac{0,01}{1!} + \frac{(0,01)^2}{2!} + \frac{(0,01)^3}{3!} + \dots$$

Označme $s_n(x)$ n -tý částečný součet této mocninné řady. Pak platí $s_1(0,01) = 1$, $s_2(0,01) = 1,01$, $s_3(0,01) = 1,01005$, $s_4(0,01) = 1,0100501\bar{6}$, atd. Je tedy jasné, že $e^{0,01}$ je s přesností na 5 desetinných míst rovno číslu 1,01005.

K odpovědi na naši otázku (7) dojdeme následujícím způsobem. Nejprve zjistíme, jakým způsobem by hledaná mocninná řada měla vypadat. Pak budeme zkoumat, za jakých předpokladů bude funkce f součtem této řady.

Poznámka 27 Pokud je odpověď na otázku (7) kladná, budeme říkat, že funkci f lze rozvinout v mocninnou řadu se středem v bodě a . V následující větě odvodíme koeficienty takové řady.

Věta 28 (o Taylorově rozvoji) *Jestliže lze reálnou funkci f rozvinout v mocninnou řadu (1) se středem v bodě a , pak pro její koeficienty platí*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (8)$$

kde pokládáme $f^{(0)}(a) = f(a)$.

Důkaz. Předpokládejme, že taková řada existuje, tzn. že existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \dots \quad (9)$$

pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Speciálně dosazením $x = a$ dostáváme $f(a) = c_0$. Protože δ je menší nebo rovno poloměru konvergence této mocninné řady, z důsledku 25 plyne

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots$$

pro $x \in (a-\delta, a+\delta)$ a tedy $f'(a) = c_1$. Opět použitím důsledku 25 dostáváme

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + 4 \cdot 3c_4(x-a)^2 + \dots$$

pro $x \in (a-\delta, a+\delta)$ a tedy $f''(a) = 2c_2$. Z důsledku 25 tedy vyplývá (8). Tedy platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (10)$$

pro všechna $x \in (a-\delta, a+\delta)$. $\square$

Důsledek 29 Existuje nejvýše jedna mocninná řada se středem v bodě a , která na nějakém okolí tohoto bodu konverguje k funkci f . Její koeficienty jsou ve tvaru (8).

Příklad 30 Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dá se vypočítat (pokuste se o to), že platí

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0.$$

Z předchozí věty plyne, že jestli by se dala funkce f rozvinout v mocninnou řadu o středu 0 na nějakém okolí tohoto bodu, pak jsou všechny její koeficienty c_n nulové. Taková řada ovšem konverguje na $\mathbb{R}$ k nulové funkci, tzn. že k funkci f nekonverguje na žádném okolí bodu 0. Z tohoto příkladu lze vidět, že i když má funkce spojitě derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}$, neznamená to ještě, že ji lze rozvinout v mocninnou řadu v libovolném bodě jejího definičního oboru.

Příklad 31 Uvažujme nyní funkci

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x > 0. \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

Podobně jako u předchozího příkladu má funkce spojitě derivace všech řádů na $\mathbb{R}$. Jestliže by se dala funkce f_1 rozvinout v mocninnou řadu o středu 0, pak by to opět musela být řada, jejíž všechny koeficienty jsou nulové. Na rozdíl od minulého příkladu, zde by tato řada konvergovala k funkci f_1 na intervalu $(-\infty, 0]$. Ale ani v tomto případě nelze funkci f_1 rozvinout v mocninnou řadu o středu 0.

Definice 32 Je-li dána reálná funkce f definovaná na okolí bodu a , $a \in \mathbb{R}$, mající v bodě a derivace všech řádů, pak řadu ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

nazýváme Taylorovou řadou funkce f se středem a , její koeficienty nazýváme Taylorovými koeficienty a její n -tý částečný součet nazýváme Taylorovým polynomem a značíme T_n . Jestliže platí $a = 0$, pak tuto řadu nazýváme Maclaurinovou řadou.

Příklad 33 Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Ze vzorce pro součet geometrické řady

$$\left(|q| < 1 \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \right)$$

vyplývá, že

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{pro každé } x \in (-1, 1).$$

Tedy funkci f lze na intervalu $(-1, 1)$ rozvinout v mocninovou řadu se středem v bodě 0. Jak se dá snadno spočítat (ikdyž i tak je to zřejmé), je poloměr konvergence této řady roven $\rho = 1$. Z důsledku 29 vyplývá, že tato řada je Taylorova řada. V tomto případě tedy nebylo nutné počítat všechny derivace funkce f v bodě 0. Tento postup s výhodou využijeme i u jiných rozvoji, u kterých je počítat výraz $f^{(n)}(a)$ obtížnější.

Poznámka 34 Protože částečné součty Taylorovy řady jsou polynomy (Taylorovy polynomy), je úloha (7) vlastně problémem aproximace funkce f polynomem stupně nejvýše n v nějakém okolí bodu a . Jak je vidět z příkladů 30 a 31, není vždy zaručeno, že Taylorova řada konverguje na nějakém okolí k funkci f (tedy není zaručeno, že $T_n(x)$ konverguje k funkci $f(x)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu a).

Definice 35 Pro danou reálnou funkci f , která má derivace v bodě a až do n -tého řádu definujeme číslo $R_{n+1}(x)$ vztahem

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$$

pro každé $x \in D(f)$ (tedy $R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x)$), nazveme ji n -tým zbytkem v Taylorově vzorci.

Následuje nutná a postačující podmínka k tomu, aby Taylorova řada konvergovala k funkci f v bodě x .

Věta 36 Taylorova řada funkce f konverguje k funkci f v bodě $x \in D(f)$ právě když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0. \quad (11)$$

Důkaz. Fakt, že Taylorova řada konverguje k funkci f v bodě x znamená, že

$$T_n(x) \rightarrow f(x),$$

což znamená

$$R_{n+1}(x) = T_n(x) - f(x) \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

□

Naše pozornost se tedy zaměří na otázku, za jakých podmínek je splněna podmínka (11). K řešení tohoto problému můžeme využít Taylorovu větu. Nejprve si zavedeme potřebné označení.

Označení: Pro $a, b \in \mathbb{R}$ budeme symbolem $I_{a,b}$ rozumět interval (a, b) , je-li $a < b$ a interval (b, a) , je-li $b < a$.

Věta 37 (*O zbytku*) Nechť f má na $J = (a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$ derivace všech řádů a nechť φ má na J derivaci, $\varphi' \neq 0$ na J . Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $x \in J$ existuje $\xi \in I_{a,x}$ tak, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - \xi)^n}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi).$$

Jestliže položíme $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$ pak dostáváme tzv. Lagrangeův tvar zbytku

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

a pro $\varphi(t) = t$ dostáváme tzv. Cauchyův tvar zbytku

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - \xi)^n (x - a)}{n!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Věta o zbytku nám umožní pro konkrétní funkci f zjistit konkrétní tvar zbytku R_{n+1} , díky čemuž můžeme dokázat, jak je to s konvergencí Taylorovy řady k funkci f . Důkaz následující věty je založen právě na použití věty o zbytku a dává nám jednodušší (na použití) kritérium konvergence Taylorovy řady k funkci f

Věta 38 Nechť reálná funkce f má spojité derivace všech řádů na $(a - \delta, a + \delta)$, $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Jestliže existuje $M > 0$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|f^{(n)}(t)| \leq M \quad \text{pro každé } t \in I_{a,x}.$$

Pak Taylorova řada konverguje k funkci f v bodě x .

Důkaz. Stačí dokázat, že je splněna podmínka (11). Vezmeme si Lagrangeův tvar zbytku $R_{n+1}(x)$. Pro něj platí

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

kde $\xi \in I_{a,x}$. Výraz nalevo zřejmě konverguje k nule pro $n \rightarrow \infty$. Tedy (11) platí. $\square$

Příklad 39 Rozvineme funkci $f(x) = e^x$ do Maclaurinovy řady. Protože platí

$$(e^x)^{(n)} = e^x \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

pak po dosazení $x = 0$ dostáváme Taylorovy koeficienty ve tvaru $c_n = 1/n!$ a Maclaurinovu řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Nyní nás bude zajímat, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ tato řada konverguje k e^x . V bodě $x = 0$ tato řada samozřejmě konverguje k e^0 (Maclaurinova řada je mocninnou řadou o středu v bodě 0). Vezmeme $x \neq 0$. Pak zřejmě platí

$$|e^t| \leq e^{|x|}$$

pro každé $t \in I_{0,x}$. Z věty 38 dostáváme, že Maclaurinova řada konverguje k funkci f v bodě x . Protože x bylo libovolné, platí

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Vezmeme-li Lagrangeův tvar zbytku $R_{n+1}(x)$, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde $\xi \in I_{0,x}$.

Podobně lze vypočítat rozvoje jiných elementárních funkcí. Viz např. Matematická analýza I (Brabec, Martan, Rozenský).

Doporučená literatura

KOPÁČEK J. Matematická analýza pro fyziky II. Matfyzpress, Praha, 2005.
DOŠLÁ, Z, NOVÁK V.: Nekonečné řady, Masarykova univerzita, Brno, 2002.

<http://www.math.muni.cz/~plch/nkpm/hlavni.pdf>