Matematická analýza KMA/MA2I
Fourierovy řady

Poznámka 1 V minulé přednášce jsme se bavili o mocninných řadách, tj. o řadách ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

kde $\varphi_n(x) = (x-a)^n$ pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Důvod, proč jsme se o nich bavili byl ten, že právě tyto řady mají mnohé pěkné vlastnosti (lokálně stejnoměrná konvergence a z ní vyplývající vlastnosti). Navíc umíme efektivně určit mocninné řady, jejichž součtem jsou např. elementární funkce (tzv. Taylorovy řady). Dalším velmi používaným typem funkčních řad jsou tzv. trigonometrické řady, tj. řady ve tvaru

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

které se používají k aproximaci 2π–periodických funkcí, nebo obecněji pro $l > 0$ řady ve tvaru

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x) \tag{2}$$

určené k aproximaci $2l$–periodických funkcí.

Fourierovou řadou budeme rozumět řadu (1) (resp. (2)) se speciálními koeficienty a_n, b_n.

Než se budeme zabývat vlastnostmi řady (1) (resp. (2)), podíváme se na obecnou teorii Fourierových řad.

Nejprve je třeba představit si některé důležité struktury používající se v matematické a funkcionální analýze – některé z nich již znáte z předchozích přednášek.

1 Prostory se skalárním součinem, normované lineární prostory

Definice 2 Nechť $(V, +, \cdot)$ je reálný vektorový prostor. Zobrazení

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$$

nazýváme skalární součin na prostoru V, jestliže platí:

(i) $\forall f \in V : \ (f, f) \geq 0$ a $(f, f) = 0 \iff f = 0$,

(ii) $\forall f, g \in V, \ c \in \mathbb{R} : \ (cf, g) = c(f, g)$,

(iii) $\forall f, g, h \in V : \ (f + g, h) = (f, h) + (g, h)$,

(iv) $\forall f, g \in V : \ (f, g) = (g, f)$

Poznámka 3 Z vlastností (ii) a (iii) vyplývá tento důležitý fakt

$$(c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n, g) = c_1(f_1, g) + \ldots + c_n(f_n, g).$$

Pomocí skalárního součinu zavádíme pojem ortogonality (kolmosti) funkcí.

Definice 4 Řekneme, že $f, g \in V$ jsou ortogonální (kolmé), jestliže

$$(f, g) = 0.$$

Příklad 5 Nechť $V = \mathbb{R}^2$, skalární součin definujeme takto

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Snadno lze ověřit, že takto definované zobrazení $(\cdot, \cdot)$ je opravdu skalárním součinem v uvedeném smyslu (navíc tento skalární součin znáte ze střední školy). Následující dvojice vektorů jsou kolmé (nakreslete si je):

$$\{(1, 0), (0, -5)\}, \{(1, -3), (3, 1)\}, \ldots$$

Příklad 6 Nechť $V = C^0(\langle a, b \rangle)$ je množina všech spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$, vybavená sčítáním funkcí a násobeném skaláry – ověřte, že jde o reálný vektorový prostor. Na V definujme skalární součin

$$\forall f, g \in C^0(\langle a, b \rangle) : (f, g) = \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Dokažte, že toto zobrazení je dobře definováno a jde o skalární součin.

Příklad 7 Uvažujme $(\mathcal{R}(\langle a, b \rangle), +, \cdot)$ prostor všech riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak (3) už není skalárním součin ve výše uvedeném smyslu. Je–li například

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = a, \\ 0 & x \in (a, b\rangle, \end{cases}$$

pak

$$(f, f) = 0 \qquad \text{a přitom} \qquad f \neq 0.$$

Ostatní vlastnosti ovšem platí – budeme symbol $(\cdot, \cdot)$ používat i pro takové funkce (nebude to ovšem již skalární součin).

Tuto obtíž můžeme vyřešit tak, že na množině $\mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ definujeme relaci $\sim$ následujícím způsobem:

$$\forall f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle): \quad f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b (f(x) - g(x))^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$

Dá se dokázat, že tato relace je relací ekvivalence na $\mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$. Z algebry je známo, že relace ekvivalence indukuje rozklad této množiny, označuje se $\mathcal{R}(\langle a, b\rangle)/\sim$ (tzv. faktorová množina $\mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ podle $\sim$ - prvky této množiny nazýváme třídy a označujeme je $[f] \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)/\sim$, kde $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$). Dá se na této množině definovat sčítání a násobení skalárem tak, že příslušná uspořádaná trojice tvoří vektorový prostor. A co je nejdůležitější: na této množině již lze definovat skalární součin takovýmto způsobem:

$$\forall [f], [g] \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)/\sim: \quad ([f], [g]) = \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

Tento skalární součin pak přirozeným způsobem indukuje normu (viz dále) a ta pak přirozeným způsobem definuje metriku na $\mathcal{R}(\langle a, b\rangle)/\sim$ (tzv. střední kvadratická vzdálenost).

Kromě skalárního součinu ještě nadefinujeme normu vektoru.

Definice 8 Nechť $(V, +, \cdot)$ je reálný vektorový prostor. Zobrazení

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

nazýváme normou na V jestliže platí

(i) $\forall f \in V : \|f\| \geq 0$ a $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$,

(ii) $\forall f \in V \; \forall c \in \mathbb{R} : \|cf\| = |c| \|f\|$,

(iii) $\forall f, g \in V : \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Příklad 9 Je–li V prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$, pak zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ definované vztahem

$$\forall f \in V : \|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

je norma na V. Dokažte!

Příklad 10 Nechť $V = \mathbb{R}^2$. Normu definujeme takto

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{((x_1, x_2), (x_1, x_2))} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Z předchozí poznámky plyne, že jde opravdu o normu. Navíc toto zobrazení znáte ze střední školy – $\|(x_1, x_2)\|$ je velikost vektoru (x_1, x_2).

Příklad 11 Nechť $V = C^0(\langle a, b\rangle)$. Opět podle předchozí poznámky můžeme normu definovat třeba takto

$$\forall f \in C^0(\langle a, b\rangle) : \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Příklad 12 Podobně jako v jednom z předchozích příkladů platí pro funkci $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ definovanou vztahem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = a, \\ 0 & x \in (a, b\rangle, \end{cases}$$

že

$$\|f\| = 0 \qquad \text{a přitom} \qquad f \neq 0.$$

Tedy $\|\cdot\|$ nemůže být na $\mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ normou, nicméně budeme toto značení dále používat (tato obtíž byla vyřešena v příkladu 7).

Definice 13 Posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ v prostoru se skalárním součinem nazveme ortogonální jestliže

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad \forall i \neq j, \qquad \|\varphi_n\| > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka 14 Ortogonální posloupnost lze definovat i v $\mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.

Příklad 15 Uvažujme následující posloupnost funkcí φ_n definovaných na $\langle 0, 2\pi\rangle$ takto:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots$$

Tuto posloupnost budeme zkráceně značit symbolem $\{\cos nx, \sin nx\}$. Dá se dokázat, že tato posloupnost je ortogonální v $C^0(\langle a, b\rangle)$ – dokažte to!

2 Fourierovy řady

Uvažujme v celé této části ortogonální posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.

Věta 16 *Nechť $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ je ortogonální posloupnost, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Jestliže řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

stejnoměrně konverguje k funkci $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ na $\langle a, b\rangle$, pak platí

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Důkaz. Platí

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Vynásobíme–li tuto rovnici funkcemi φ_k, $k \in \mathbb{N}$, pak

$$f(x)\varphi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)\varphi_k(x), \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Z předpokladu stejnoměrné konvergence plyne, že i řada $\sum c_n \varphi_n \varphi_k$ stejnoměrně konverguje k $f\varphi_k$ na $\langle a, b \rangle$ a tedy

$$(f, \varphi_k) = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\varphi_n, \varphi_k).$$

Z ortogonality plyne

$$(f, \varphi_k) = c_k(\varphi_k, \varphi_k) \qquad \text{pro } k \in \mathbb{N}.$$

□

Definice 17 Nechť $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ je ortogonální posloupnost funkcí, $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$. Pak čísla

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$$

nazýváme Fourierovy koeficienty funkce f vzhledem k $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka 18 Z definice je vidět, že Fourierova řada je jakousi analogií Taylorovy řady (také k dané funkci f konstruujeme řadu $\sum c_n \varphi_n$).

Poznámka 19 Z definice nevyplývá, že by mělo platit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

(podobně jako u Taylorových řad). Dokonce tomu tak v mnoha případech není. Dá se ovšem dokázat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ konverguje k f jiným způsobem než bodově nebo stejnoměrně. V následujících dvou definicích si přestavíme další typ konvergence posloupností funkcí, resp. funkčních řad.

Definice 20 Nechť $f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$. Definujeme

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x}$$

tzv. střední kvadratickou odchylku funkcí f a g.

Poznámka 21 Platí tento nepěkná vlastnost

$$f_n, f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle), \quad (\|f_n - f\| \to 0 \quad \not\Rightarrow \quad f_n \to f \text{ na } \langle a,b\rangle),$$

tzn. že pokud posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci f středně kvadraticky, neplyne z toho, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k f bodově – příklad ukazující platnost tohoto tvrzení byl ukázán na přednášce.

Definice 22 Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ konverguje k $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ středně kvadraticky (podle středu) na $\langle a,b\rangle$ jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Věta 23 *Nechť $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální posloupnost funkcí z $\mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Fourierova řada konverguje k f středně kvadraticky na $\langle a,b\rangle$ právě tehdy, když pro funkci f platí tzv. Parsevalova rovnost*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 = \|f\|^2.$$

Poznámka 24 Pro ortogonální posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ vždy platí tzv. Besselova nerovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 \le \|f\|^2.$$

Pro detaily viz doporučená skripta.

3 Fourierovy řady vzhledem k systému $\{\cos nx, \sin nx\}$

V této kapitole se budeme zabývat Fourierovými řadami vzhledem k ortogonálnímu systému $\{\cos nx, \sin nx\}$ tzn. systému

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots\} \tag{4}$$

Jak už bylo řečeno na začátku, součet Fourierovy řady vzhledem k tomuto systému bude 2π–periodická funkce.

Lemma 25 *Nechť f je 2π–periodická funkce integrovatelná na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Pak pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí*

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 26 Předchozí lemma (zkuste ho dokázat) nám vlastně říká, že celou teorii můžeme provést na jednom konkrétním intervalu délky 2π, např. na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ – Fourierovy koeficienty budou pořád stejné – viz následující věta....

Věta 27 *Fourierova řada libovolné integrovatelné funkce f na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ má vzhledem k systému (4) tvar*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kde a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f rovné

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že

$$a_n = \frac{(f, \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N},$$

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(0 \cdot x)\,\mathrm{d}x.$$

Z důvodu jednotnosti vzorce pro a_n a a_0 budeme psát

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(0 \cdot x)\,\mathrm{d}x$$

což se ve výsledném vzorci projeví tak, že místo a_0 bude $a_0/2$. Podobně vypočítáme b_n. $\square$

Poznámka 28 Všimněte si co bude pro koeficienty a_n, popř. b_n znamenat fakt, že funkce f je lichá (popř. sudá) na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. O tom mluví následující věta.

Věta 29 *Nechť f je integrovatelná na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Je–li f sudá funkce, pak*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x, \ \textit{pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad b_n = 0, \ \textit{pro } n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Je–li f lichá funkce, pak

$$a_n = 0, \ \textit{pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \ \textit{pro } n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Důkaz. Důkaz je snadný. Stačí si uvědomit, že součin sudé funkce a liché funkce je lichá funkce (součin dvou lichých funkcí je sudá funkce; součin dvou sudých funkcí je sudá funkce) a fakt, že integrál z liché funkce přes interval $\langle -\pi, \pi \rangle$ je nulový a integrál ze sudé funkce přes interval $\langle -\pi, \pi \rangle$ je roven dvojnásobku integrálu stejné funkce přes interval $\langle 0, \pi \rangle$. □

Je–li funkce f sudá nebo lichá na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ znamená to, že její Fourierova řada bude mít jednodušší tvar – půjde o tzv. řadu kosinovou, tzn.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

nebo o řadu sinovou, tzn.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Toho se dá využít následujícím způsobem:

(a) Uvažujme integrovatelnou funkci f na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Rozšíříme ji na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$ sudě, tzn. dodefinujeme

$$f(x) = f(-x) \quad \text{pro každé } x \in \langle -\pi, 0).$$

Fourierovu řadu této dodefinované funkce nazýváme *rozvoj funkce f (tzn. té původní funkce f) v kosinovou řadu na $\langle 0, \pi \rangle$*.

(b) Uvažujme integrovatelnou funkci f na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Rozšíříme funkci f na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$ liše, tzn. předefinujeme $f(0) = 0$ a definujeme

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{pro každé } x \in \langle -\pi, 0).$$

Fourierovu řadu této funkce nazýváme *rozvoj funkce f v sinovou řadu na* $\langle 0, \pi \rangle$.

Poznámka 30 Často chceme rozvíjet funkci na jiném intervalu než je interval délky 2π. Uvažujme funkci $2l$–periodickou ($l > 0$). Pak platí: Fourierova řada libovolné integrovatelné funkce f na intervalu $\langle -l, l \rangle$ má vzhledem k systému

$$\{1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \ldots\}$$

tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x),$$

kde a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f rovné

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.1 Konvergence Fourierovy řady

Doposud jsme se zabývali pouze konstrukcí Fourierovy řady vzhledem k systému (4). Nyní se podíváme na samotnou konvergenci řady k funkci f. Jak už víme z jedné z předhozích kapitol, Fourierova řada konverguje k f středně kvadraticky za předpokladu, že je splněna Parsevalova rovnost. Tento výsledek není ovšem určen k praktickému použití, a to ze dvou důvodů: (1.) často potřebujeme více než jen středně kvadratickou konvergenci, (2.) určit zda je splněna Parsevalova rovnost dá hodně práce – často to ani nelze.
Následující dvě věty nám dávají návod, jak efektivně zjistit bodovou a stejnoměrnou konvergenci Fourierovy řady vzhledem k systému (4) k funkci f.

Věta 31 *(Dirichletova) Nechť f je po částech spojitá a po částech monotonní na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Pak její Fourierova řada konverguje na $\langle -\pi, \pi \rangle$ a její součet je roven*

(a) $\frac{1}{2}[\lim_{x \to x_0-} f(x) + \lim_{x \to x_0+} f(x)]$ *je–li* $x_0 \in (-\pi, \pi)$,

(b) $\frac{1}{2}[\lim_{x \to \pi-} f(x) + \lim_{x \to -\pi+} f(x)]$ *je–li* $x_0 = \pi$ *nebo* $x_0 = \pi$

Poznámka 32 Je–li $x_0 \in (-\pi, \pi)$ a f je v x_0 spojitá, pak Fourierova řada konverguje k $f(x_0)$.

Poznámka 33 Jak už víme, pouhá bodová konvergence nám často nestačí. Rádi bychom věděli, jestli pro jisté „hezčí“ funkce f je konvergence dokonce stejnoměrná. Tato otázka bude zodpovězena kladně.

Věta 34 *Nechť 2π–periodická funkce f je na $\langle -\pi, \pi \rangle$ spojitá a má po částech spojitou derivaci. Pak její Fourierova řada konverguje k funkci f stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$.*

Doporučená literatura

KOPÁČEK J. Matematická analýza pro fyziky II. Matfyzpress, Praha, 2005.
DOŠLÁ, Z, NOVÁK V.: Nekonečné řady, Masarykova univerzita, Brno, 2002.

http://www.math.muni.cz/~plch/nkpm/hlavni.pdf