

Logika: Označme M množinu všech mužů a Z množinu všech žen. Relace $S(m, z)$ znamená, že muž m je manželem ženy z . Relace $L(m, z)$ znamená, že muž m miluje ženu z , relace $L(z, m)$ potom že žena z miluje muže m . (Všimněte si, že relace L není na rozdíl od S symetrická, tedy zatímco $S(m, z)$ implikuje $S(z, m)$, v případě $L(m, z)$ to neplatí.) Zapište následující výroky do symbolického jazyka, vyslovte a zapište jejich negace:

Každý muž je ženatý.

Existuje svobodná žena.

Existují alespoň dva svobodní muži.

Existuje muž se dvěma manželkami.

Všechny manželky jsou věrné.

Existuje muž s nevěrnou manželkou.

Každý muž miluje nějakou ženu.

Rozmyslete si negaci následujícího výroku: Každý student má přítelkyni, jejíž všechny kamarádky budou nešťastné, když on nebude umět počítat.

Matematická indukce: Dokažte následující tvrzení (n je vždy přirozené číslo):

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{pro } q \neq 1,$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \text{pro } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Číselné množiny: Dokažte, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo. Dokažte, že \sqrt{p} není racionální číslo pro žádné prvočíslo p .

Suprema a infima: Nalezněte maxima, minima, suprema a infima následujících množin:

$$M_1 := \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$M_2 := \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m < n \right\}$$

$$M_3 := \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \right\}$$

$$M_4 := \left\{ \frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Neurazte se, ale: Řešte nerovnici $|x-2| - x > |x| + 2|2x-1|$.

Načrtněte graf funkce $f(x) = ||x-1| - 1| - 1|$.

Řešte nerovnici $|x^2 - 4x + 3| < 2(x+1)$.

Řešte nerovnici

$$\frac{x+2}{x-1} \leq 2.$$

Legrace:

- U Sněhurky bylo na narozeninách mnoho hostů. Dokažte, že alespoň dva z nich zde měli stejný počet přátel.
- Šmoulové mají ve vesničce 13 domečků. Vzdálenosti mezi domečky jsou různé. Každý Šmoula chodí často na návštěvu do nejbližšího domečku s dárečkem. Je ve šmoulí vesničce domeček, kam nikdo nechodí na návštěvu?
- Máte velblouda a 3000 banánů. Tržiště je 1000 mil daleko. Velbloud unese nejvíce 1000 banánů. Každou míli, po kterou nese banány, sní jeden banán. Kolik nejvíc banánů může přinést do tržiště?